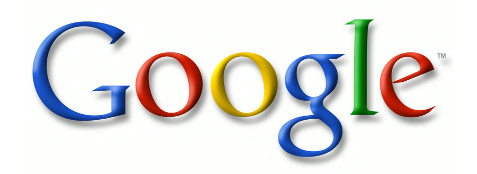
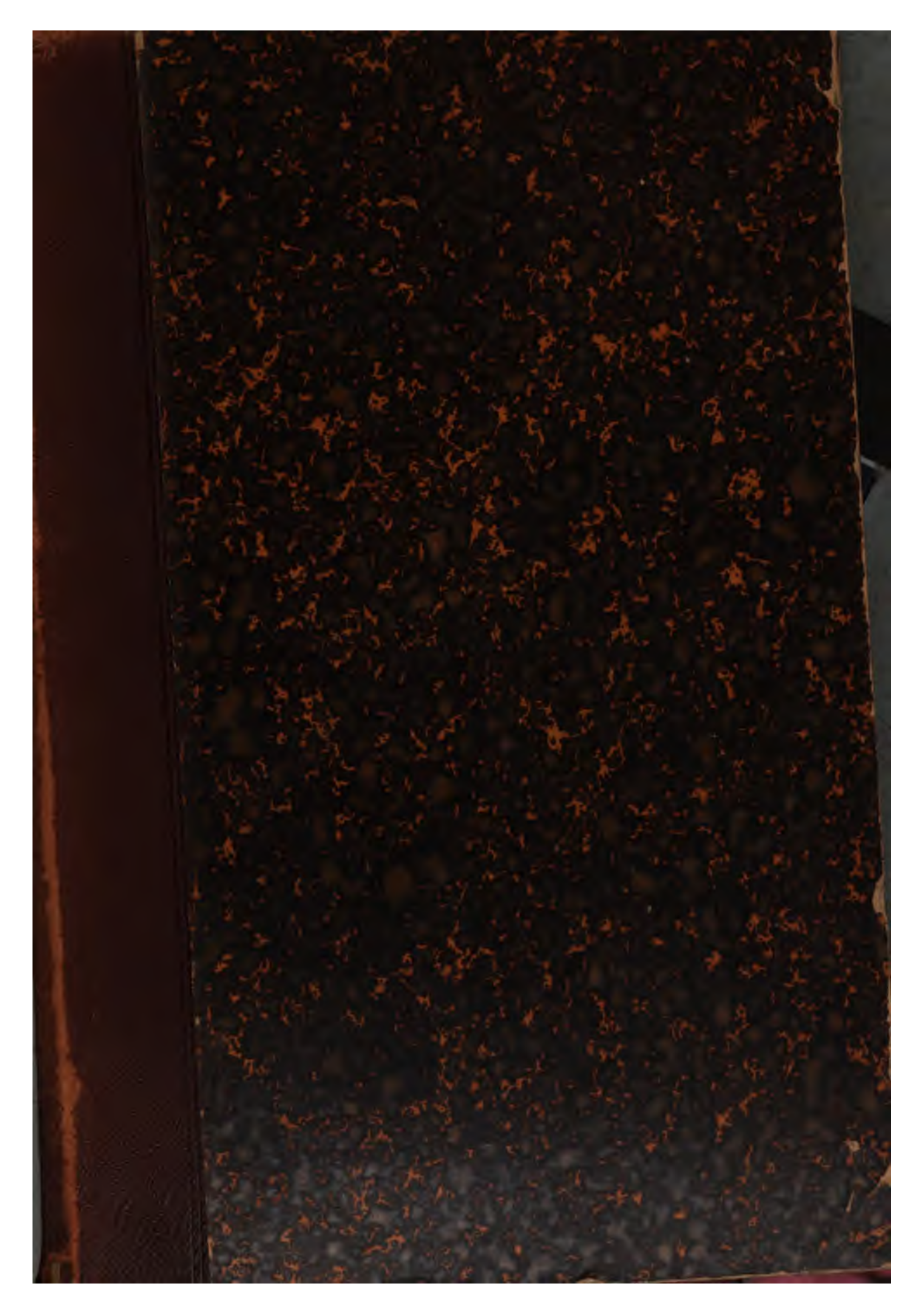
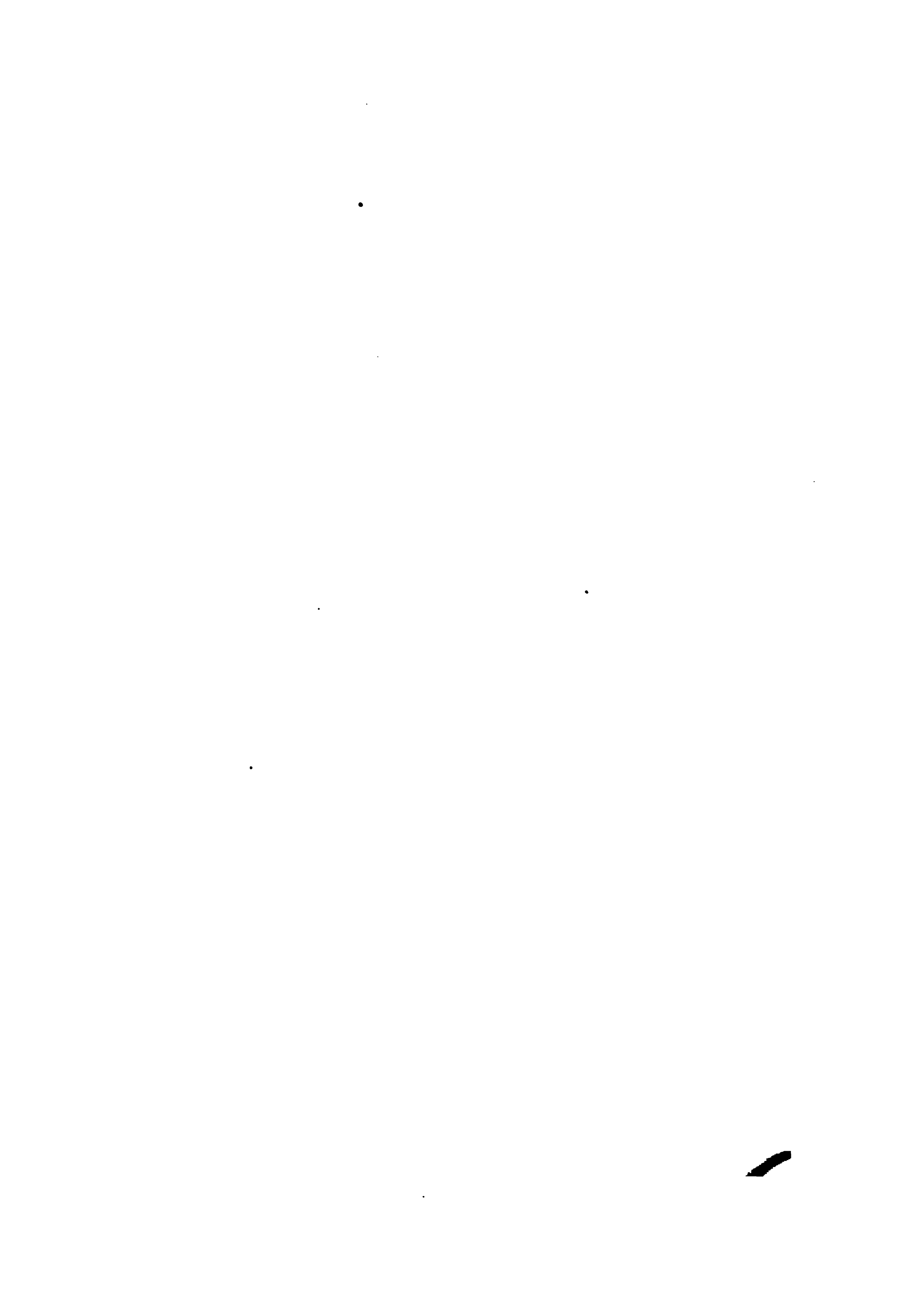






THEORIE

DER

UNICURSALEN PLANCURVEN

VIERTER BIS DRITTER ORDNUNG

IN

SYNTHETISCHER BEHANDLUNG

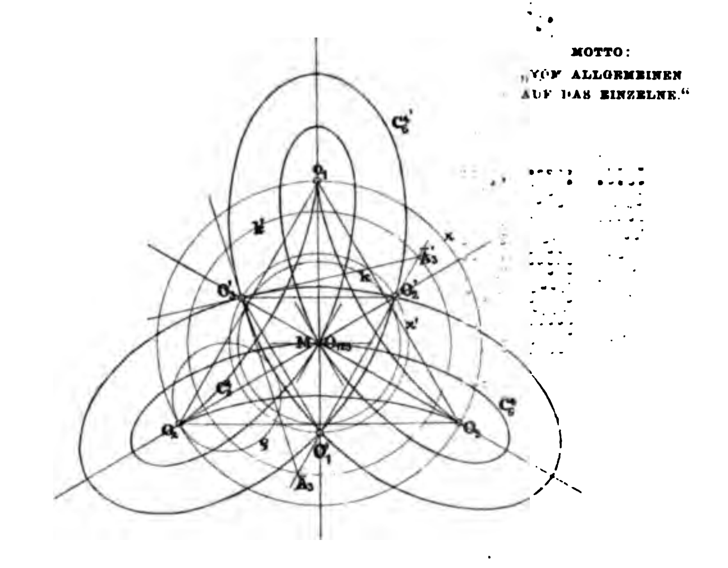
VON

PROFESSOR WILH. BINDER,

AN DER N. Ö. LANDES-OBERREALSCHULE UND HÖHEREN FACHSCHULE FÜR MASCHINENWESEN IN WIENER-NEUSTADT,
RITTER DES HERZOGL. SACHSEN-ERNESTINISCHEN HAUSORDENS II. CLASSE,
MITGLIED DER „VEREINIGUNG DEUTSCHER MATHEMATIKER" etc.

MIT 65 FIGUREN IM TEXT UND AUF ZWEI TAFELN.

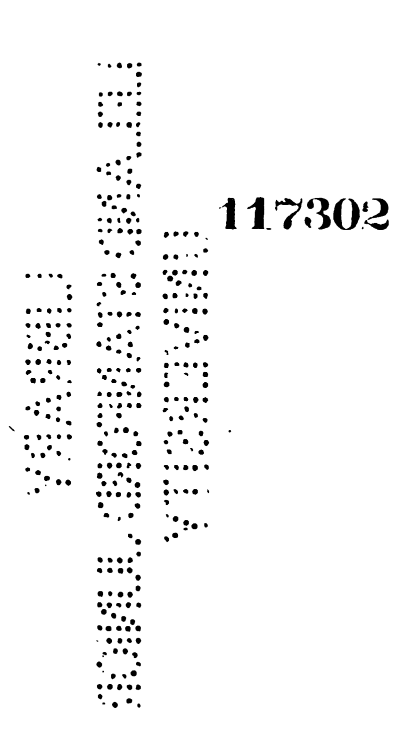
MOTTO:
„VOM ALLGEMEINEN AUF DAS EINZELNE."



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1896.


117302

HERRN KÖNIGL. SÄCHS. GEHEIMRATH

DR. O. SCHLÖMILCH

IN AUFRICHTIGER VEREHRUNG UND FREUNDSCHAFT

GEWIDMET

VOM VERFASSER.

Vorwort.

Das vorliegende Buch ist auf Anregung von befreundeter Seite aus einer Sammlung von Aufsätzen und Abhandlungen hervorgegangen, die zum Theile im Laufe der letzten drei Decennien von hervorragenden Mathematikern, zum andern Theile von mir speciell in der Zeitschrift für Mathematik und Physik publicirt worden sind. Der Inhalt umfasst nur das Gebiet der ebenen Unicursalcurven der 3ten und jener der 4ten Ordnung, und zwar in dieser Beschränkung des Geschlechtes $p = o$ aus dem Grunde, weil deren Theorie ihrer wesentlichsten Eigenschaften durch die heutige Literatur so ziemlich als abgeschlossen angesehen werden darf.*)

Die Methode der Betrachtung, welche streng und ausschliesslich den Lehrgang dieses Buches durchzieht, ist die synthetische. Es ist mir bisher kein Werk zur Hand gekommen, das die genannten Curvengattungen gleichzeitig, gewissermaassen auseinander hervorfliessend und nur vom Standpunkte der

*) Eine Einführung in die elementare synthetische Theorie der nicht unicursalen Plancurven 4ter Ordnung hat der Verfasser veröffentlicht: „Ueber Plancurven vierter Ordnung vom Geschlechte $p = 1$ und ihre typischen Formen" im Festbande „*Xenia Austriaca*" (ausgewählte Programmaufsätze österr. Mittelschulen) zur 42. Versammlung deutscher Philologen und Schulmänner zu Pfingsten 1893 in Wien.

projectivischen Anschauung, behandelt. Dabei bin ich von dem gewöhnlichen Gesetze: „von dem Einfachen auf das Complicirte zu leiten“, abgewichen, indem ich die Curven der 4ten Ordnung vorausschicke. Dieser Vorgang hat sich im Laufe meiner Studien als zweckmässig, sozusagen von selbst, für die Betrachtung der beiden Curvenarten aufgedrängt, indem man die Curven 3ter Ordnung — da sie vielfach Modificationen der allgemeineren Eigenschaften solcher von der 4ten Ordnung enthalten — als Specialisirungen der letzteren mit weit grösserem Nutzen einsehen kann.

Das Studium der Inflexionselemente einer Plancurve mit Hilfe des Calcüls geht bekanntlich von der Polarentheorie aus, um schliesslich die Hesse'sche und die Cayley'sche Curve zur Grundlage zu nehmen. Für synthetische Untersuchungen eignen sich die genannten Hilfscurven weniger, weil ihre graphische Construction erhebliche Umständlichkeiten verbindet. Ich musste deshalb bedacht sein, ein Aequivalent zu schaffen, welches im Stande ist, auf ebenso elegantem Wege zu den Inflexionselementen einer Curve 4ter oder 3ter Ordnung hinzuleiten, wie die Hesse'sche Curve. In meiner Abhandlung*): „Ueber absolute Elementensysteme etc.“ habe ich zuerst den Weg gezeigt, dem ich in den diesbezüglichen Ableitungen hier systematisch folge, womit sich auch der weitere Vortheil verbindet, dass in der betreffenden Directionscurve, ausser den Inflexionen, gleichzeitig die Berührelemente

*) Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Phys. XXXVI. Bnd., II. Hft.

der Doppeltangenten einer Curve 4[ter] Ordnung in einen projectivischen Zusammenhang gebracht werden. Die Fruchtbarkeit dieser Methode erweist sich insbesondere auch bei gewissen Degenerirten einer Curve 4[ter] Ordnung in einer linearen Construction ihrer Inflexionselemente, die bisher nicht bekannt war.

Durch die bezeichnete Nothwendigkeit von Directionscurven ist gewissermassen gleichzeitig eine Einführung in die Elemente höherer Plancurven, als der 4[ten] Ordnung, damit verbunden, was den weiter Strebenden gewiss willkommen sein dürfte.

Die graphische Darstellung und Erzeugung einer Curve betreffend, bleibe ich den Steiner'schen Principien oder den Gesetzen der Inversion durch quadratische Abbildung, resp. Transformation derselben auf einem Kegelschnitte, getreu. In ersterer Beziehung verwende ich eine specielle Verwandtschaftslage, die ich in meinem Aufsatze*): „Ueber die Realität der Doppeltangenten etc.“ auseinandergesetzt habe, deren Vortheile aber für Jeden, der den Griffel beim Studium gebraucht, sehr bald vor Augen tritt.

Originell dürfte der Weg der Behandlung der Curven 4[ter] Ordnung mit zwei imaginären Doppelpunkten sein. Es sind insbesondere auch die circularen und bicircularen Species abgeleitet und untersucht und endlich der Fall der Identität mit den bekannten Rollcurven nachgewiesen. Weiter ist der interessante Fall einer Curve mit dreifachem Singularpunkt als einer ver-

*) Schlömilch's Zeitschrift f. Math. u. Phys. XXXV. Bnd., I. Heft

längerten Hypocycloide gezeigt, und endlich hat sich herausgestellt, dass unter Umständen eine Cardioide identisch einer Epi- oder einer Pericycloide gleich werden kann.

Die Theorie der Fusspunktencurven erfährt eine ebenso einfache als sachgemässe Begründung im Sinne der projectivischen Geometrie, wodurch z. B. die Lemniscate in einer anderen Beziehung erscheint, als dieses bisher die Analytik ergeben hat etc. Fusspunktencurven dürften berufen sein, in den Anwendungen der Mechanik als „Trägheitslinien höherer Ordnung", wie ich sie in der Definition Culmann's bezeichnen möchte, eine wichtige Rolle zu spielen, worauf ich an anderem Orte, wenn Zeit und Gelegenheit es begünstigen, hinzuweisen gedenke.

Was die Anordnung und den Aufbau des Stoffes betrifft, so ist darüber Folgendes zu bemerken. Die Theorie der Kegelschnitte wird vollständig vorausgesetzt. Ich fand es aber zweckmässig, einen allgemeinen Theil voran zu stellen, in welchem neben der Aufzählung der wichtigsten Eigenschaften höherer Plancurven eine kurze Ableitung der Büschel, resp. Netze und Schaaren von Kegelschnitten Platz findet. In diesem einleitenden Theile des Buches ist dann auch den allgemeinen Beziehungen mehrdeutiger Grundgebilde sowie den Gesetzen der quadratischen Transformationen erklärend Raum gegeben. Die zunächst folgenden beiden Theile des Buches besprechen endlich das eigentliche Hauptthema: Die unicursalen Plancurven der 4ten und jene der 3ten Ordnung.

Den circularen Curven habe ich eine eingehende Ausführlichkeit gewidmet und auf ihre sogenannte „Kreisverwandtschaft" wiederholt hingewiesen. Insbesondere ist dieses bei den Kreisverwandten 3ter Ordnung geschehen, wo auch die von mir bezeichneten „Scheiteleigenschaften" sowie die Eigenthümlichkeit eines Centrums, das solche Curven besitzen, eingehend erörtert werden. Es dürfte dem geehrten Leser nicht unwillkommen sein, dass die Gesetze der Symmetrie der betreffenden Curven vom Standpunkte ihrer projectivischen Entstehung dem Studium unterzogen sind, auf welche Art jene längst bekannten Curvenspecies der Cycloiden, der Lemniscaten, Cardioiden sowie auch der Cissoiden verallgemeinert erscheinen. In dieser Hinsicht muss hervorgehoben werden, dass meines Wissens eine umfassende, methodisch-einheitliche Ableitung und Erzeugung der genannten Curvengattungen — welche bekanntlich in der angewandten Mechanik eine so wichtige Aufgabe haben — mittelst Strahlenbüschel oder Punktenreihen, sowie ihre betreffenden Sekanten- und Tangentenconstructionen jeder Art etc., bisher in keinem Werke, ausgenommen in verstreuten Aufsätzen von Fachblättern, gezeigt sind.

Wenn Eigenschaften, welche minder charakteristisch oder zu sehr dem Gebiete der Analytik anheimgestellt sind, wie z. B. die Brennpunktseigenschaften circularer und bicircularer Curven, keine Erwähnung erfahren, so möge der geneigte Leser dieses damit als begründet

annehmen, dass solche speciell metrische Eigenschaften bis jetzt einer synthetischen Betrachtungsweise nur schwer zugänglich sind, und dass der Inhalt dieses Buches überhaupt seine Sphäre auf elementare Untersuchungen beschränken will. Dass dadurch unvermeidlich mancherlei Wiederholungen unterlaufen, wird insbesondere dem Anfänger eher erwünscht, als tadelnswerth vorkommen.

Dem vorliegenden Werke sind 65 Figuren im Texte und auf zwei Tafeln beigegeben. Sie umfassen die erklärten Beziehungen und Constructionen zum grössten Theile; allein manches musste unterdrückt werden, sollte nicht die Deutlichkeit der Figur leiden und der Umfang des Buches Dimensionen erreichen, welche dessen Herausgabe erschwert haben würden. Es ist demnach dem geehrten Leser, sofern eine Einführung in das Studium des behandelten Themas beabsichtigt ist, nicht genug anzuempfehlen, den beschriebenen Anleitungen der Construction stets mit dem Stifte selbstthätig zu folgen. — Die Figuren im Texte, welche auf zinkographischem Wege mittelst Photographie vom Originale erzeugt sind, mussten wegen des Buchformates zum Theile im verkleinerten Maassstabe hergestellt werden. Dadurch hat bei einigen derselben die Deutlichkeit, insbesondere der Buchstabenbezeichnung, Einbusse erlitten. Diesem Uebelstande wird am besten durch den Gebrauch einer Lupe begegnet. — Die Bezeichnungsweise der Gebilde und die durchgeführten Constructionsschemata sind systematisch an-

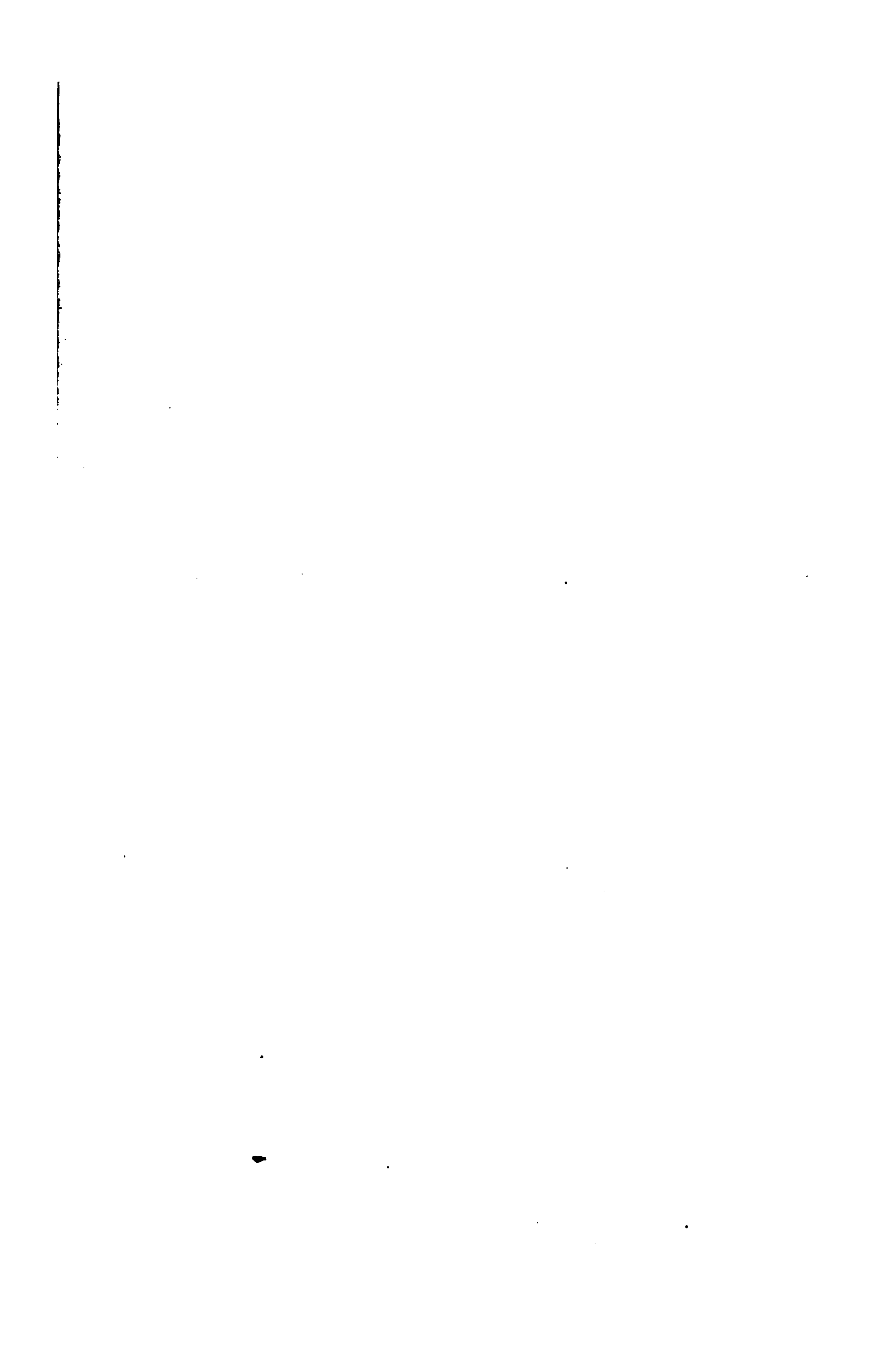
geordnet, und habe ich mich diesbezüglich Schröter angeschlossen.

Dem Herrn Verleger spreche ich meinen verbindlichsten Dank aus für die Bereitwilligkeit, mit der er die Herausgabe und Ausstattung dieses Buches unterstützte.

Mögen denn Wollen und Können jenen Beifall bei dem geehrten Leser finden, der allein Mühe zu lohnen vermag! —

Wienerneustadt, Weihnachten 1895.

W. Binder.



Erster Theil.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Fundamental-Eigenschaften allgemeiner Plancurven.

1. Sind die Elemente (Punkte, Tangenten) eines Curvenzuges einer und derselben Trägerebene angehörig, so bildet dieser eine ebene oder Plancurve.

Sobald die Elemente einer Plancurve einfache Punkte oder Tangenten sind, ohne dass sich also in einem solchen Elemente eine Mehrheit von einfachen Elementen concentrirt, heisst dieselbe eine allgemeine Curve.

Eine Plancurve ist n^{ter} Ordnung, wenn sie von einer beliebigen Geraden ihrer Trägerebene in höchstens n Punkten geschnitten wird, die entweder sämmtlich reell oder paarweise imaginär sein können.

Eine Plancurve ist n^{ter} Classe, wenn aus einem beliebigen Punkte ihrer Trägerebene höchstens n Tangenten an sie gehen, die entweder sämmtlich reell oder paarweise imaginär sein können.

2. Der allgemeine Charakter einer Plancurve specialisirt sich in jenen Fällen, in welchen zwei oder mehrere Elemente derselben als eine Singularität der Curve zusammenfallen (coincidiren).

Die Coincidenz von zwei oder von r Punkten in der Art, dass sich in einem solchen Punkte zwei oder r Zweige der Curve gegenseitig durchsetzen (oder berühren), erzeugt daselbst einen Doppel- oder einen r-fachen Punkt der Curve.

Die Coincidenz von zwei oder von r Tangenten in der Art, dass von einer solchen Tangente zwei oder r Zweige der Curve gleichzeitig berührt werden, erzeugt daselbst eine Doppel- oder eine r-fache Tangente der Curve.

3. Befindet sich ein Punkt einer Plancurve auf der ∞ fernen Geraden ihrer Trägerebene, so heisst er ein Asymptotenpunkt.

Ist die ∞ ferne Gerade der Trägerebene einer Plancurve eine Tangente an diese, so heisst diese Gerade eine Asymptote.

Man nennt aber auch überhaupt jede Tangente einer Plancurve, welche sie in einem ∞ fernen Punkte berührt, eine „Asymptote" der Curve.

4. Zur Bestimmung einer Plancurve n^{ter} Ordnung (Classe) sind $\frac{n(n+3)}{2}$ Elemente erforderlich; dabei zählt jedes r-fache Element für $\frac{r(r+1)}{2}$ einfache Angabebedingungen.

Woferne eine Gerade mit einer Curve n^{ter} Ordnung mehr als n Punkte gemeinschaftlich hat, bildet diese Gerade einen Bestandtheil der letzteren.

5. In jedem r-fachen Punkte (Knoten) treffen sich nach (2) r Curvenäste. Jedem Aste gehört in dem Knotenpunkte eine Tangente an. Sind diese Tangenten

reell, so heisst der Knotenpunkt ein eigentlicher; sind sie imaginär, so dass also keiner der Curvenzweige durch den besagten Knotenpunkt zieht, so kann dieser letztere gleichwohl ein eigentlicher Punkt sein und heisst solchenfalls ein Einsiedler oder isolirter Punkt.

Die Tangenten, welche an die, in einem Knotenpunkte sich durchsetzenden Curvenäste in ihm ziehen, heissen Knotentangenten. Speciell enthält also ein Doppelpunkt zwei Doppelpunktstangenten.

6. Sobald die Tangenten eines Doppelpunktes in Coincidenz gelangen, bilden sie eine Rückkehrtangente und der Doppelpunkt wird ein Rückkehrpunkt (Cuspidalpunkt). Man hat zwei Arten zu unterscheiden: den Pfeil oder die Spitze, wenn die beiden Curventheile zu beiden Seiten der Rückkehrtangente liegen; den Schnabel oder das Horn, sobald beide Curvenzüge sich nur auf einer Seite der Rückkehrtangente befinden.

Nach (4) vereinigt ein Doppelpunkt drei einfache Punkten- und eine Rückkehrtangente drei einfache Tangentenelemente.

Eine Plancurve n^{ter} Ordnung allgemeinen Charakters besitzt höchstenfalls $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Doppelpunkte und $\frac{n(n-2)(n^2-9)}{2}$ Doppeltangenten. Dabei wird die Zahl, welche anzeigt, um wie viel die wirkliche Anzahl von Doppelpunkten die Maximalzahl, welche nach der angegebenen Formel für die Ordnung der Curve zukommt,

übersteigt, das Geschlecht genannt. Eine Curve, welche nach dieser Definition vom Geschlechte $= 0$ ist, heisst eine Unicursalcurve.

7. Jede Gerade, die eine Plancurve n^{ter} Ordnung in n Punkten (reell, imaginär) schneidet, ist für diese Sekante. Sie wird zu einer einfachen Tangente, wenn ein Paar der n Schnittpunkte coincidiren, wobei die restlichen $(n-2)$ Schnitte die Tangentialpunkte genannt werden. Treten je zwei Paare der n Schnittpunkte zusammen, so entsteht die Doppeltangente und in dem Falle, wo eine Coincidenz von einem Punktentripel erfolgt, bildet sich auf der Plancurve eine Inflexion, d. h. die Sekante wird eine Wendetangente mit dreipunktiger Berührung. In dem Berührpunkte einer Wendetangente vereinigen sich somit drei einfache Punktenelemente der Curve.

Eine allgemeine Plancurve n^{ter} Ordnung ohne sonstige Singularitäten enthält $3n(n-2)$ Inflexionen. Besitzt jedoch die Curve d Doppelpunkte und r Rückkehrpunkte, dann ist die Zahl i ihrer Inflexionselemente ausgedrückt durch die Formel:

$$i = 3n(n-2) - 6d - 8r.$$

8. Eine Plancurve n^{ter} Ordnung mit d Doppelpunkten und r Rückkehrpunkten ist von der Classe:

$$n(n-1) - 2d - 3r.$$

Eine Plancurve n^{ter} Classe mit t Doppeltangenten und i Inflexionstangenten ist von der Ordnung:

$$n(n-1) - 2t - 3i.$$

Aus vorstehendem Gesetze ist einzusehen, dass sich polar-reciprok gegenüberstehen die Singularitäten:

Der eigentliche Doppelpunkt mit reellen Tangenten:	Die eigentliche Doppeltangente mit reellen Berührpunkten;
Der isolirte Doppelpunkt mit imaginären Tangenten:	Die isolirte Doppeltangente mit imaginären Berührpunkten;
Der Rückkehrpunkt mit der Rückkehrtangente.	Die Inflexionstangente mit dem Inflexionspunkte.

9. Für jedes r-fache Punktenelement degenerirt die Classenzahl einer Plancurve und für jedes r-fache Tangentenelement degenerirt die Ordnungszahl einer Plancurve jedesmal um $r(r-1)$ Einheiten.

In einem r-fachen Punkte einer Plancurve schneiden sich r Zweige derselben und es repräsentirt ein solcher: $\frac{r(r-1)}{2}$ Doppelpunkte.

10. Zwei ebene Curven m^{ter} resp. n^{ter} Ordnung haben mn gemeinschaftliche Punkte.	Zwei ebene Curven m^{ter} resp. n^{ter} Classe haben mn gemeinschaftliche Tangenten.
Durch die n^2 gemeinsamen Punkte zweier Curven n^{ter} Ordnung gehen unzählig viele Curven n^{ter} Ordnung, welche ein Cur-	Die n^2 gemeinsamen Tangenten zweier Curven n^{ter} Classe berühren unzählig viele Curven n^{ter} Classe, welche eine Cur-

venbüschel formiren. Die n^2 gemeinsamen Elemente des Büschels heissen dessen Grundpunkte.

venschaar formiren. Die n^2 gemeinsamen Tangenten der Schaar heissen deren Grundlinien.

Fehlen von den n^2 gemeinschaftlichen Elementen eines Curvenbüschels oder einer Curvenschaar r Elemente, so entsteht ein Curvennetz mit $(n^2 - r)$ Grundelementen.

Zweiter Abschnitt.

Curvenbüschel und Curvenschaaren zweiter Ordnung und Classe.

11. Wenn man in (10) die Zahl $n = 2$ setzt, so erhält man in dem dort dual gegenüberstehenden Doppelsatz ein Kegelschnittsbüschel und eine Kegelschnittsschaar. Man kann die Entstehung dieser beiden Gebilde auf folgendem Weg erklären:

Sind zwei Gerade tt' Träger von je einer Punkteninvolution, welche durch die Paare AA_1, BB_1 und $A'A_1'$, $B'B_1'$ angegeben sind; ist E der den beiden Trägern tt' gemeinsame Schnittpunkt, welchem in der Involution auf t ein

Sind zwei Punkte TT' Träger von je einer Strahleninvolution, welche durch die Paare aa_1, bb_1; $a'a_1'$, $b'b_1'$ angegeben sind; ist e der den beiden Trägern TT' gemeinsame Verbindungsstrahl, welchem in der Involution in T ein

Punkt E_1 und in der Involution auf t' ein Punkt E_1' conjugirt ist, so ist die Verbindungslinie

$$|E_1 E_1'| = e$$

die Polare des Poles E.

Projicirt man aus einem beliebigen Punkte X der Ebene die beiden Involutionen tt' durch ein Strahlenbüschel, so erhält man in X zwei concentrische Strahleninvolutionen, welche auf der Polaren e zwei conlocale Punkteninvolutionen ausschneiden, deren Doppel-(Asymptoten-)Elemente DD_1 sind.

Die Verbindungslinien

$$|ED| = t_D, \quad |ED_1| = t_{D_1}$$

sind Tangenten eines Kegelschnitts, welcher durch sie und ihre Berührungspunkte DD_1 sowie den Punkt X mit zusammen fünf Elementen ausreichend bestimmt ist.

Jedem Punkte X der Ebene gehört auf diese

Strahl e_1 und in der Involution in t' ein Strahl e_1' conjugirt ist, so ist der Schnittpunkt

$$(e_1 e_1') = E$$

der Pol der Polaren e.

Schneidet man durch eine beliebige Gerade x der Ebene die beiden Involutionen TT' in einer Punktenreihe, so erhält man auf x zwei conlocale Punkteninvolutionen, welche sich im Pole E als zwei concentrische Strahleninvolutionen projiciren, deren Doppel-(Asymptoten-)Elemente dd_1 sind.

Die Schnittpunkte

$$(ed) = D, \quad (ed_1) = D_1$$

sind Punkte eines Kegelschnittes, welcher durch sie und ihre Tangenten dd_1 sowie der Tangente x mit zusammen fünf Elementen ausreichend bestimmt ist.

Jeder Geraden x der Ebene gehört auf diese

Weise ein bestimmter Kegelschnitt an und die gesammten Kegelschnitte dieser Art formiren ein Kegelschnittsbüschel.

Jedes Individuum des Büschels geht, wie leicht eingesehen wird, durch die beiden Doppelpunktenpaare der gegebenen Involutionen auf den Trägern tt'. Somit sind dieselben die Grundpunkte des Büschels.

Weise ein bestimmter Kegelschnitt an und die gesammten Kegelschnitte dieser Art formiren eine Kegelschnittsschaar.

Jedes Individuum der Schaar berührt, wie leicht eingesehen wird, die beiden Doppelstrahlenpaare der gegebenen Involutionen in den Trägern TT'. Somit sind dieselben die Grundlinien der Schaar.

12. Die Realität der gemeinschaftlichen Elemente (Grundpunkte, Grundlinien) der vorstehenden beiden Erzeugnisse ist abhängig von der Art der auf den zu Grunde liegenden Trägern gegebenen Involutionen. Sind diese letztern nämlich gleichzeitig hyperbolisch oder gleichzeitig elliptisch, so werden im ersteren Falle die gemeinschaftlichen Elemente reell, im letzteren Falle imaginär sein.

Wenn die bezeichneten Involutionen abwechselnd elliptisch und hyperbolisch sind, dann erscheint nur ein einziges Paar reeller gemeinschaftlicher Elemente. Ein specielles Interesse bietet der Fall, in welchem die genannten Involutionsgebilde auf den zu Grunde gelegten Trägern tt' oder TT' gleichzeitig parabolisch

sind. Bei dieser Annahme paaren sich die gemeinschaftlichen Elemente jedesmal zu einer Coincidenz und es ergibt sich das dual gegenüberstehende Kegelschnittsgebilde von Büschel und Schaar als eine Identität von unendlich vielen sich doppelt berührenden Kegelschnitten.

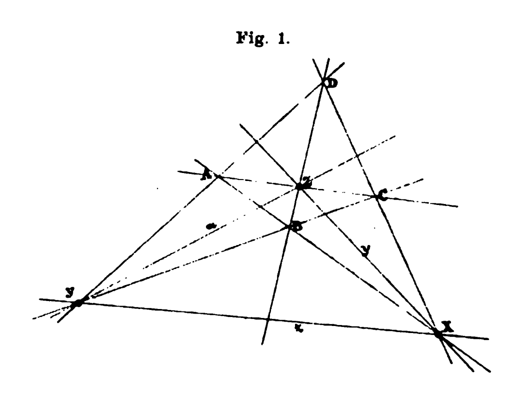
13. Die Entstehung der Büschel und Schaaren von Kegelschnitten lässt sich auch in folgender Weise erklären:

Werden in der Ebene vier unveränderliche Punkte $ABCD$ fixirt und einer derselben, etwa A, als Träger eines Strahlenbüschels angenommen, so ist durch diese vier Punkte und je ein Element des Büschels ein Kegelschnitt bestimmt, welcher in A jenes Element zur Tangente hat. Die Gesammtheit aller so entstehenden Kegelschnittsindividuen resultirt ein Kegelschnittsbüschel, dessen vier gemeinschaftliche Grundpunkte die gegebenen Punkte $ABCD$ sind.

Werden in der Ebene vier unveränderliche Tangenten $abcd$ fixirt und eine derselben, etwa a, als Träger einer Punktenreihe angenommen, so ist durch diese vier Tangenten und je ein Element der Reihe ein Kegelschnitt bestimmt, welcher von a in jenem Elemente berührt wird. Die Gesammtheit aller so entstehenden Kegelschnittsindividuen resultirt eine Kegelschnittsschaar, deren vier gemeinschaftliche Grundlinien die gegebenen Tangenten $abcd$ sind.

14. Denkt man sich (Fig. 1) in den vier Grundpunkten $ABCD$ eines Kegelschnittsbüschels an jedes Individuum die zugehörige Tangente, so ist jeder Grundpunkt Träger eines Strahlenbüschels. Diese Strahlenbüschel lassen sich so paaren, dass sie sich jedesmal perspectivisch in einer Geraden schneiden:

Fig. 1.



$$AB \barwedge x \barwedge CD; \quad AC \barwedge z \barwedge BD; \quad AD \barwedge y \barwedge BC.$$

Die Geraden xyz sind die Seiten des Diagonaldreiecks in dem vollständigen Vierecke $ABCD$. Die Ecken dieses Dreiecks sind die Schnitte:

$$(xy) = Z; \quad (yz) = X; \quad (xz) = Y.$$

Analog entspricht den vier Grundlinien einer Kegelschnittschaar ein Diagonaldreiseit, wenn man diese vier Grundlinien als ein vollständiges Vierseit auffasst.

15. Eine beliebige Transversale in der Ebene eines Kegelschnittsbüschels schneidet aus demselben eine quadratische Punkteninvolution, in welcher die conjugirten Elementen-

Ein beliebiger Punkt in der Ebene einer Kegelschnittsschaar verbindet in derselben eine quadratische Tangenteninvolution, in welcher die conjugirten Elementenpaare an je ein

paare auf je einem Individuum des Büschels liegen. In den Doppelpunkten der Involution berührt je ein Kegelschnitt des Büschels den Involutionsträger.

Individuum der Schaar ziehen. Die Doppelstrahlen der Involution berühren jeder für sich je einen Kegelschnitt der Schaar im Involutionsträger.

Sofern die Grundpunkte des Kegelschnittsbüschels als vollständige Figur in Betracht gezogen werden, erkennt man, dass deren Gegenseitenpaare als drei im Büschel degenerirte Kegelschnittsindividuen erscheinen. Ebenso ergibt sich, dass die Gegeneckenpaare des vollständigen Grundlinienvierseits der Kegelschnittsschaar als die drei in der Schaar degenerirten Individuen aufzufassen sind.

16. In Bezug der Art der in den beiden vorliegenden Kegelschnittsgebilden enthaltenen Individuen lässt sich Nachstehendes anmerken.

a) Im Kegelschnittsbüschel.

Ist die ∞ ferne Gerade der Ebene die Transversale, so ist klar, dass die beiden Kegelschnitte, welche die ∞ ferne Gerade in den Doppelpunkten der hervorgerufenen Involution berühren, Parabeln sind. Dieses Parabelpaar wird reell oder imaginär sein, je nachdem die Involution auf der ∞ fernen Geraden hyperbolisch oder elliptisch ist. Im erstern Falle gibt es im Büschel sowohl Ellipsen wie Hyperbeln, weil bekanntlich die Parabel zwischen beiden den Uebergang bildet. Im letztern Falle kommen im Kegelschnittsbüschel nur Hyperbeln vor.

b) In der Kegelschnittsschaar.

Da jedes Individuum der Schaar bestimmt ist durch die vier Tangenten des Grundlinienvierseits und eine beliebige fünfte Tangente der Ebene, so muss geschlossen werden, dass es in der Schaar nur einen einzigen Kegelschnitt geben kann, der Parabel ist, denjenigen, welcher die ∞ ferne Gerade als fünftes Tangentenelement besitzt. Die übrigen Kegelschnitte der Schaar müssen nothwendig Ellipsen und Hyperbeln sein.

17. Von den Kegelschnittsgebilden mit paarweise imaginären Grundelementen sei insbesondere auf das „Kreisbüschel“ hingewiesen. Dasselbe besitzt die ∞ fernen imaginären Kreispunkte als Grundpunkte; das zweite Paar Grundpunkte kann reell oder ebenfalls imaginär sein, jedenfalls aber ist deren Verbindungslinie (die aus den Elementen bekannte „Potenzlinie“ zweier Kreise) eine eigentliche Gerade. Die gesammten Individuen des Gebildes sind Kreise und die Potenzlinie (Chordale) stellt auf der ∞ fernen Geraden der Ebene ein degenerirtes Kreisindividuum vor.*)

Ein System von concentrischen Kreisen ist nichts anderes, als jenes (12) Identität-Gebilde von Büschel

---

*) Eine praktische Anwendung hiervon zur Lösung der Pothenot'schen Aufgabe als Messtischoperation (Rückwärtseinschneiden) am Felde hat der Verfasser gezeigt. Siehe hierüber: „Ueber das Problem der vier Punkte im Sinne der neueren Geometrie“. Sitz.-Ber. d. kais. Akad. d. Wiss. LXXXIII. Bd. 1881 p. 659 u. „Das graphische Rückwärtseinschneiden (Stationiren) etc.“ im 24. Jahr.-Ber. der N.-Oe. Landes-Oberrealschule Wiener-Neustadt, 1889.

oder Schaar in doppelter Berührung, bei welchem jedoch diese letztere imaginär in den Kreispunkten auf der ∞ fernen Geraden der Trägerebene stattfindet.

18. In jedem Büschel und in jeder Schaar kann es einen Kreis als Individuum des betreffenden Gebildes geben. Im Büschel hat dieser Kreis die imaginären Kreispunkte auf der ∞ fernen Geraden (als Transversale) gemein. Im reciproken Sinne gilt dies für die Kreisschaar. Kommen in einem der betrachteten Gebilde zwei Kreise vor, dann sind alle andern Individuen ebenfalls Kreise: Kreisbüschel, Kreisschaar.

19. In jedem Büschel und in jeder Schaar von Kegelschnitten kommt wenigstens eine gleichseitige Hyperbel vor. Für das Büschel sieht man die Richtigkeit dessen dadurch sofort ein, wenn man sich durch einen beliebigen Punkt der Trägerebene Parallelen zu den Asymptoten der einzelnen Individuen des Büschels zieht. Die Gesammtheit derselben ist eine quadratische Strahleninvolution. Die Axenstrahlen dieser Involution sind offenbar den Asymptoten der in dem Büschel somit evident vorkommenden gleichseitigen Hyperbel parallellaufend.

20. Die ∞ ferne Gerade der Ebene ist die gemeinschaftliche Polare der Mittelpunkte aller Kegelschnittsindividuen. Für die degenerirten Individuen des Büschels sind diese die Ecken des Diagonaldreiseits

des Grundpunktenvierecks. Die gesammten Mittelpunkte der Individuen im Büschel liegen auf einem Kegelschnitt: dem „Mittelpunktskegelschnitt". In der Schaar ist der geometrische Ort der Mittelpunkte eine Gerade: die „Mittelpunktsgerade", welche der Axe der einzig vorkommenden Parabel gleichgerichtet ist.

Dritter Abschnitt.

A. Mehrdeutige Elementensysteme.

21. Stehen zwei Systeme von Elementen (Punkte oder Strahlen) in solcher Beziehung, dass einem Elemente des einen Systems m Elemente des anderen und einem Elemente des letzteren n solche des ersteren entsprechen, so sagt man, die beiden Systeme stehen in m-n-deutiger Beziehung.

Befinden sich die beiden m-n-deutigen Elementensysteme auf einem und demselben Träger (Gerade, Punkt, Curve), so heissen sie conlocal. Tritt ein Element des einen Systems mit einem des andern Systems in Coincidenz (Zusammenfall, Deckung), so entsteht ein Doppelelement beider Systeme. Die Anzahl der Doppelelemente ist diesfalls $= m + n$. Weiter kann eine Coincidenz von r Doppelelementen entstehen, welcher Fall ein r-faches Doppelelement der beiden m-n-deutigen Elementensysteme vorstellt.

Nun kann es aber auch vorkommen, dass ein

Paar coincidirende Elemente des einen Systems einem einzelnen Elemente des andern Systems entsprechen. Diesfalls ist das Coincidenzpaar ein Doppelelement des ersteren Systems und das Einzelelement heisst man ein Verzweigungselement des letzteren Systems.

In zwei m-n-deutigen Systemen gibt es in dem m-deutigen Systeme $2n(m-1)$ Doppelelemente, welchen ebensoviele Verzweigungselemente im n-deutigen Systeme zukommen; ebenso entsprechen die $2m(n-1)$ Doppelelemente des n-deutigen der gleichen Anzahl Verzweigungselemente des m-deutigen Systems.

22. Wir wollen nun zwei auf einem Kegelschnitt K_2^2 conlocale m-n-deutige Tangentensysteme voraussetzen. Bringt man die Tangenten des einen Systems mit den ihnen entsprechenden des andern Systems zum Schnitt, so bilden die gesammten Schnittpunkte einen geometrischen Ort, welcher die Directionscurve D heisst. Jede Tangente des m-deutigen Systems wird von den ihr entsprechenden n Tangenten des n-deutigen Systems in n Punkten getroffen. Ebenso aber trifft jedes Element des n-deutigen Systems m entsprechende des m-deutigen Systems. Wir erhalten also auf einer beliebigen Geraden der gemeinsamen Trägerebene beider Systeme $(m+n)$ Schnittpunkte, weshalb die Directionscurve von der $(m+n)^{\text{ten}}$ Ordnung mit dem Symbole $D^{(m+n)}$ ist.

23. In den beiden auf dem Kegelschnitte K_2^2 befindlichen m-n-deutigen Tangentengebilden können involutorisch (vertauschungsfähig) sich entsprechende Tangentenpaare vorkommen; ihre Anzahl ist:

$$\left[\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}\right].$$

Jedes dieser involutorischen Tangentenpaare erzeugt auf der Directionscurve einen Doppelpunkt, in welchem sich zwei Curvenzweige durchsetzen.

24. In (21) wurde angegeben, dass die beiden m-n-deutigen Systeme zusammen:

$$2n(m-1)+2m(n-1)$$

Doppelelemente enthalten. In jedem Doppelelemente fallen zwei sich entsprechende Tangenten zusammen, das heisst, die Directionscurve berührt in einem solchen Punkte den Kegelschnitt K_2^2. Nachdem nun die $(m+n)$ Doppelelemente der beiden m-n-deutigen Systeme zweifach zu zählen sind, so erhält man:

$$2n(m-1)+2m(n-1)+2(m+n)=4mn$$

gemeinschaftliche Tangenten zwischen der Directionscurve $D^{(m+n)}$ und dem Kegelschnitt K_2^2, woraus die Classenzahl $\frac{4mn}{2}=2mn$ und somit das vollständige Symbol $D_{2mn}^{(m+n)}$ der Directionscurve resultirt.

25. Wird eines der beiden m-n-deutigen Elementen-Systeme eindeutig, dann bildet das andere System eine Involution gleichen Grades.

Eine Involution n^{en} Grades enthält $2(n-1)$ Doppelelemente. Jedes Element einer n-elementigen Gruppe entspricht vertauschungsfähig den $(n-1)$ übrigen Elementen. Setzen wir also auf einem Kegelschnitte K_2^2 eine Punkteninvolution n^{ten} Grades voraus, so kann man jeden Punkt derselben mit den $(n-1)$ übrigen einer Gruppe durch Gerade verbinden, welch' letztere eine Enveloppe umhüllen, die Involutionscurve genannt wird. Diese Curve ist $(n-1)^{ter}$ Classe und $(n-1)(n-2)^{ter}$ Ordnung; Symbol $= I_{(n-1)}^{(n-1)(n-2)}$. Die Involutionscurve berührt die in den $2(n-1)$ Doppelpunkten der Involution ziehenden Kegelschnittstangenten und schneidet den Kegelschnitt in den $2(n-1)(n-2)$ Verzweigungspunkten.

26. Währenddem die Directionscurven (Ortscurven durch Tangentensysteme oder Enveloppen durch Punktensysteme erzeugt) mehrdeutiger Elementensysteme allgemeine Curven (ohne Singularitäten (2)) sind, ist dieses bei Involutionscurven nicht der Fall.

B. Symmetrische Elementensysteme.

27. Hat man auf einem Kegelschnitt zwei gleichdeutige Elementensysteme gegeben, so bilden dieselben ein symmetrisches Elementensystem gleichen Grades. Wenn somit n Elementen ebensoviele desselben Systems entsprechen, so ist dasselbe ein symmetrisches System n^{ten} Grades. Es werden also zwei n-deutige Elementensysteme das symmetri-

sche System n^{ten} Grades bilden und in einem solchen offenbar (21), da $m = n$ ist, $2n$ Doppelelemente erster Art und $2n(n-1)$ Doppelelemente zweiter Art mit ihren entsprechenden Verzweigungselementen enthalten sein.

28. Verbindet man in einem auf einem Kegelschnitt gegebenen symmetrischen Punktensysteme n^{ten} Grades jeden Punkt des Kegelschnitts mit den ihm entsprechenden n Punkten des Systems, so umhüllen die gesammten Verbindungslinien eine Curve n^{ter} Classe, die Directionscurve des Systems.

Die Directionscurve durchsetzt den Kegelschnitt in den $2n(n-1)$ Verzweigungspunkten (27), weshalb ihre Ordnungszahl $= \frac{2n(n-1)}{2} = n(n-1)$ ist. In diesen $2n(n-1)$ Verzweigungspunkten wird sie von Tangenten berührt, welche auf dem Kegelschnitt als Sehnen desselben die gleiche Anzahl der Doppelelemente zweiter Art ausschneiden. Andererseits enthält die Directionscurve mit dem Kegelschnitte $2n$ gemeinschaftliche Tangenten, welche den letzteren in den Doppelpunkten erster Art (27) berühren. Symbol der Curve ist: $D_n^{n(n-1)}$.

29. Ist ein Kegelschnitt der Träger eines symmetrischen Tangentensystems n^{ten} Grades, so bildet die Directionscurve desselben einen geometrischen Ort, dessen einzelne Punkte hervorgebracht werden, wenn man jede Kegelschnittstangente mit den n ihr im

Systeme entsprechenden Tangenten des Kegelschnitts zum Schnitt bringt, woraus man sofort erkennt, dass die Directionscurve n^{ter} Ordnung ist. Folglich durchsetzt auch die Curve den Kegelschnitt jetzt in den $2n$ Doppelelementen erster Art, während sie mit ihm $2n(n-1)$ gemeinschaftliche Tangenten besitzt, die für ihn Doppelelemente zweiter Art sind, und aus den Berührungspunkten dieser gemeinschaftlichen Tangenten auf der Curve ziehen die Verzweigungstangenten zum andern Mal an den Kegelschnitt. Aus der Anzahl $2n(n-1)$ der gemeinschaftlichen Tangenten mit dem Kegelschnitt folgt die Classe $\frac{2n(n-1)}{2} = n(n-1)$ der Curve: $D^n_{n(n-1)}$.

30. Es ist leicht einzusehen, dass die beiden Directionscurven in (28) und (29) sich polarreciprok gegenüberstehen. Die Directionscurven symmetrischer Systeme auf einem Kegelschnitt sind im Allgemeinen Curven ohne Doppeltangenten und Inflexionstangenten, also allgemeine Curven. Sie können aber auch in besonderen Fällen specielle Curven sein.

C. Erzeugnisse mehrdeutiger Elementargebilde.

31. „Das Erzeugniss von zwei m-n-deutigen Strahlenbüscheln in einer Ebene ist eine Curve $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung und $2mn^{\text{ter}}$ Classe, welche den

„Das Erzeugniss von zwei m-n-deutigen Punktenreihen in einer Ebene ist eine Curve $(m+n)^{\text{ter}}$ Classe und $2mn^{\text{ter}}$ Ordnung, welche den Trä-

Träger des m-deutigen Büschels als einen m-fachen und den Träger des n-deutigen Büschels als einen n-fachen Punkt enthält. Dem gemeinsamen Strahle der beiden Büschel entsprechen im m-fachen Punkte m Tangenten und im n-fachen Punkte n Tangenten der Curve."

ger der m-deutigen Reihe als eine m-fache und den Träger der n-deutigen Reihe als eine n-fache Tangente enthält. Dem gemeinsamen Punkte der beiden Reihen entsprechen in der m-fachen Tangente m Berührungspunkte und in der n-fachen Tangente n Berührungspunkte der Curve."

32. „Zwei in einer Ebene befindliche m-n-deutige Strahlenbüschel, deren gemeinsamer Strahl sich r-mal selbst entspricht, sind in reducirter Lage r^{ter} Ordnung."

„Zwei in einer Ebene befindliche m-n-deutige Punktenreihen, deren gemeinsamer Punkt sich r-mal selbst entspricht, sind in reducirter Lage r^{ter} Ordnung."

Wenn man zwei m-n-deutige Elementargebilde in die reducirte Lage r^{ter} Ordnung bringen soll, so ist dieses nur in der Voraussetzung möglich, dass in denselben ein Paar Elemente vorkommen, von denen jedem das andere r-mal entspricht. Man heisst die beiden Gebilde dann reductionsfähig und jenes heisst das Reductionselementenpaar r^{ter} Ordnung.

„Das Erzeugniss von zwei reductionsfähigen r^{ter}

„Das Erzeugniss von zwei reductionsfähigen r^{ter}

Ordnung, aber nicht in reducirter Lage befindlichen m-n-deutigen Strahlenbüscheln ist eine Curve $(m+n)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche die Büschelträger zu m- und n-fachen Punkten und den Schnitt des Reductionsstrahlenpaares zu einem r-fachen Punkte enthält.“

Ordnung, aber nicht in reducirter Lage befindlichen m-n-deutigen Punktenreihen ist eine Curve $(m+n)^{\text{ter}}$ Classe, welche die Reihenträger zu m- und n-fachen Tangenten und die Verbindungslinie des Reductionspunktenpaares zu einer r-fachen Tangente enthält.“

Befinden sich die vorstehenden Gebilde jedoch bereits in reducirter Lage, dann ist das Erzeugniss der beiden Strahlenbüschel eine Curve $(m+n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem $(m-r)$-fachen und einem $(n-r)$-fachen Punkte, während das Erzeugniss der betreffenden Punktenreihen eine Curve $(m+n-r)^{\text{ter}}$ Classe mit einer $(m-r)$-fachen und einer $(n-r)$-fachen Tangente ist.

33. Wenn die beiden mehrdeutigen Gebilde involutorischen Charakters sind, so ändert dieses im Allgemeinen nichts an den voranstehenden Gesetzen ihres Erzeugnisses. Nur ein Fall muss hervorgehoben werden, wo nämlich die beiden Involutionsgebilde gleich n-deutig sind und in ihrem gemeinschaftlichen Elemente je ein n-faches Element enthalten, welche beiden Elementen einander projectivisch entsprechen. Für diesen Fall gilt der Satz:

„Zwei projectivische Strahleninvolutionen n^{ten} Grades, in deren gemeinschaftlichem Strahle sich zwei einander entsprechende n-fache Strahlen vereinigen, erzeugen eine Curve n^{ter} Ordnung und $n(n-1)^{\text{ter}}$ Classe. Der gemeinschaftliche Strahl gilt als Theilerzeugniss, so dass also die beiden Involutionsträger nicht der Curve als mehrfache Punkte angehören."

„Zwei projectivische Punkteninvolutionen n^{ten} Grades, in deren gemeinschaftlichem Schnitte sich zwei einander entsprechende n-fache Punkte vereinigen, erzeugen eine Curve n^{ter} Classe und $n(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Der gemeinschaftliche Punkt gilt als Theilerzeugniss, so dass also die beiden Involutionsträger nicht der Curve als mehrfache Tangenten angehören."

Vierter Abschnitt.

Quadratische Transformation. Inversion.

34. Durch die Annahme von vier Grundpunkten $ABCD$ ist (13) ein Kegelschnittsbüschel bestimmt, dessen gemeinschaftliches Diagonaldreieck XYZ ist (14).

Ein beliebiger Punkt P in der Ebene ruft auf jedem Individuum des Büschels eine Polare hervor, deren Gesammtheit ein Strahlenbüschel mit dem Centrum $\bar{P}$ ist. Die Punkte $P\bar{P}$ sind conjugirte Pole in Bezug auf das gegebene Kegelschnittsbüschel, und

man erkennt leicht, dass umgekehrt, bei Annahme des Punktes $\bar{P}$, der Punkt P als conjugirter Pol erhalten werden muss und dass also diese Eigenschaft der Punkte der Ebene vertauschungsfähig (involutorisch) ist.

Diese gegenseitige Beziehung der Punkte in der Ebene scheidet dieselben in zwei Systeme $\Sigma\bar{\Sigma}$, deren jedes für sich als einer Ebene angehörig betrachtet werden kann, welche in der gemeinsamen Trägerebene zusammenfallen.

35. Wird der variable Punkt eine Ecke des Diagonaldreiecks XYZ, so entspricht ihm als conjugirter Pol nach (14) jeder Punkt der gegenüberliegenden Seite dieses Dreiecks. Ebenso muss nach (14) eingesehen werden, dass einem der Grundpunkte $ABCD$ der betreffende selber entspricht, er also ein Doppelpunkt der Beziehung ist.

36. Wird in dem Systeme Σ eine beliebige Gerade g angenommen, so entsteht die Frage nach dem entsprechenden Gebilde im Systeme $\bar{\Sigma}$?

Den einzelnen Punkten der Geraden g entsprechen ihre conjugirten Pole. Die Gerade g schneidet die Seiten des Dreiecks XYZ in je einem Pnnkte, und nach (35) entspricht (involutorisch) die gegenüberliegende Ecke dieses Dreiecks diesem Punkte. Diese derartig entsprechenden Punkte (Bilder) der Geraden g liegen auf einem Kegelschnitte, welcher dem Dreiecke XYZ umschrieben ist. Wir bemerken somit, dass jeder Geraden des Systems Σ

im Allgemeinen ein Kegelschnitt bildlich im Systeme $\overline{\Sigma}$ entspricht.

Insbesondere wird also auch den ∞ fernen Geraden jedes der beiden Systeme $\Sigma\overline{\Sigma}$ je ein Kegelschnitt als Bild entsprechen, der dem Dreiecke XYZ umschrieben ist. Jeder ∞ ferne Punkt des einen Systems hat dann sein Bild auf diesem besonderen Kegelschnitte des andern Systems.

37. Welches ist das Bild einer Geraden, die durch eine der Ecken des Diagonaldreiecks XYZ zieht? Um diese Frage zu beantworten, erinnere man sich, dass das Bild der vorgelegten Geraden ein Kegelschnitt ist, welcher die Ecken XYZ enthält. Da die Gerade durch eine Ecke des Dreiecks XYZ hindurchgeht, so ist (35) die gegenüberliegende Dreiecksseite ein Bestandtheil ihres Bildes, und weil ihr Gesammtbild ein Kegelschnitt sein soll, so kann der andere Bestandtheil dieses degenerirten Kegelschnitts nichts anderes sein, als eine zweite Gerade, welche offenbar durch denselben Eckpunkt des Dreiecks XYZ geht, wie die gegebene Gerade. Wir sehen also, sofern man von der als Bildtheil resultirenden Dreiecksseite absieht, dass das Bild einer Geraden, welche durch eine Ecke von XYZ zieht, abermals eine Gerade von der gleichen Eigenschaft ist.

38. Um zu einem Strahle, welcher eine Ecke des Diagonaldreiecks XYZ enthält, den entsprechenden

zu finden, braucht man nur den harmonisch zugeordneten in Bezug jener beiden Geraden, welche sich in der betreffenden Dreiecksecke als Seiten des vollständigen Vierecks $ABCD$ schneiden, aufzusuchen.

39. Die vorstehenden transformatorischen Beziehungen zweier ebenen Systeme $\Sigma\overline{\Sigma}$ begreifen eine „Steiner“sche Verwandtschaft. Da insbesondere einer beliebigen Geraden des einen Systems ein Kegelschnitt, somit der Gesammtheit aller Geraden der Ebene ein Kegelschnittsnetz (10) mit den Grundpunkten XYZ, allgemein: einer Curve n^{ter} Ordnung eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung bildlich in dem anderen Systeme entspricht, so wird diese Beziehung auch als „quadratische Transformation oder Verwandtschaft“ bezeichnet.

40. Wir müssen uns das Diagonaldreieck XYZ bisher derart vorstellen, dass es eine Figur für sich in jedem der beiden Systeme $\Sigma\Sigma$ bildet, und also diese beiden Figuren in der gemeinsamen Trägerebene einander deckend zusammenfallen. Lässt man jedoch diese Annahme nicht bestehen, dann werden sich die beiden, den Systemen zugehörigen Diagonaldreiecke beliebig in der gemeinsamen Trägerebene von einander getrennt situiren. Insofern heisst jedes dieser Dreiecke das „Hauptdreieck“ desjenigen Systems, welchem es angehört.

41. In (35) ist gezeigt worden, dass die Grundpunkte $ABCD$ als die Doppelpunkte der Beziehung zwischen den sich deckenden Systemen $\Sigma\overline{\Sigma}$ auftreten. Man kann sich nun den besonderen Fall vorlegen: „dass ein Paar dieser Doppelpunkte die ∞ fernen imaginären Kreispunkte der Trägerebene sind."

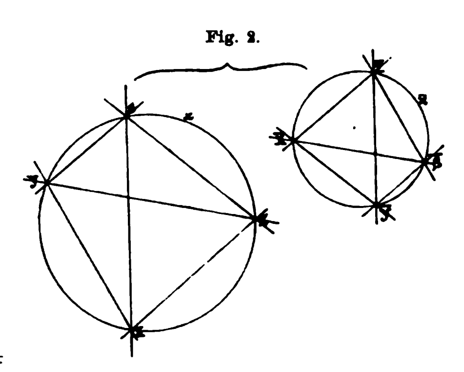
Diese Annahme setzt ein perspectivisches Zusammenfallen der ∞ fernen Geraden der beiden ebenen Systeme $\Sigma\overline{\Sigma}$ a priori voraus. Die beiden Hauptdreiecke dieser Systeme werden dann zwei ähnliche Figuren sein, welche im Allgemeinen von einander getrennt liegen. Das Bild der perspectivisch gemeinsamen ∞ fernen Geraden (36) wird aber, als Individuum eines Kreisbüschels (17), ein Kreis in dem einen System, dem bezüglichen Hauptdreiecke umschrieben, und ein zweiter Kreis in dem andern System, ebenfalls dem zugehörigen Hauptdreiecke umschrieben, sein. Jeder dieser beiden, seinem Hauptdreiecke umschriebene Kreis heisst „Hauptkreis".

42. Die Geraden, welche durch eine Ecke (Hauptpunkt) des einen Hauptdreiecks ziehen (Hauptstrahlen), bilden ein Strahlenbüschel; diesem ist ein zweites projectivisch, dessen Centrum der conjugirte (homologe) Hauptpunkt im andern Systeme ist. Beide Büschel erzeugen einen Kegelschnitt, der offenbar ein Individuum des Kreisbüschels (41) ist. Auf diese Weise ergeben sich in den homologen Hauptpunktenpaaren drei projectivische Büschelpaare, deren Erzeugnisse

drei Kreise sind, die sich, wie man nun erkennt, in den beiden übrigen Doppelpunkten der quadratischen Beziehung gegenseitig durchsetzen müssen.

43. Bei der Annahme der ∞ fernen imaginären Kreispunkte als Doppelelemente einer quadratischen Verwandtschaft zweier ebenen Systeme kann man (Fig. 2) von den beiden Hauptdreiecken XYZ, $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ nur fünf Elemente beliebig wählen; das sechste bestimmt sich durch die fixirte Beziehung folgend.

Fig. 2.



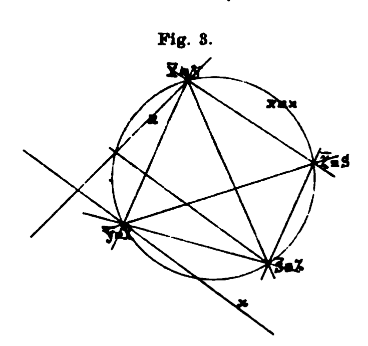
Ist XYZ und $\overline{X}\overline{Y}$ gegeben, so erinnere man sich, dass (35) allen Punkten von $|\overline{X}\overline{Y}|$ der Hauptpunkt Z entspricht, folglich der Richtung dieser Geraden (ihrem Punkte auf der perspectivisch gemeinsamen ∞ fernen Geraden) der Schnitt S auf dem Hauptkreise $\varkappa$ von XYZ mit der durch Z zu $|\overline{X}\overline{Y}|$ gleichlaufenden Geraden. Dieser Schnitt S bildet somit das Perspectivitätscentrum im Systeme XYZ. Zieht man durch $\overline{X}$ eine Gerade $\parallel |SY|$ und durch $\overline{Y}$ eine Gerade $\parallel |SX|$, so schneiden sich diese in dem gesuchten $\overline{Z}$-Punkte.

Nachdem den drei Ecken $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ die Seiten $|YZ|$, $|XZ|$, $|XY|$ bildlich entsprechen, so treffen sich die durch diese Ecken zu ihren entsprechenden Seiten

gleichlaufenden Geraden im Perspectivitätscentrum $\overline{S}$ des Systems $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ und es müssen die vier Punkte $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}\overline{S}$ auf dem Hauptkreise $\overline{x}$ liegen.

44. Es lässt sich (Fig. 3) bei der Wahl der beiden Hauptdreiecke XYZ, $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ nach den zuletzt gemachten Voraussetzungen, diese immerhin derart treffen, dass diese beiden Dreiecke und somit auch ihre Hauptkreise einander gleich sind. Diesfalls wird es möglich, dass die beiden Hauptkreise sich deckend angenommen werden können. Die Hauptdreiecke kann man dann ebenfalls so aufeinander legen, dass sie eine Seite gemeinschaftlich haben, jedoch so, dass zwei einander entsprechende (homologe) Hauptpunkte nicht coincidiren, weil wir sonst eine Identität erhalten und die quadratische Beziehung zerfällt.

Fig. 3.



Auf diese Weise vereinigen sich sodann die beiden Perspectivitätscentra mit den dritten homologen Hauptpunkten in zwei auf dem Coincidenz-Hauptkreise $x \doteqdot \overline{x}$ liegenden Paaren, deren Verbindungslinie parallel der Verbindungslinie der beiden andern aufeinanderliegenden homologen Hauptpunktenpaare ist.

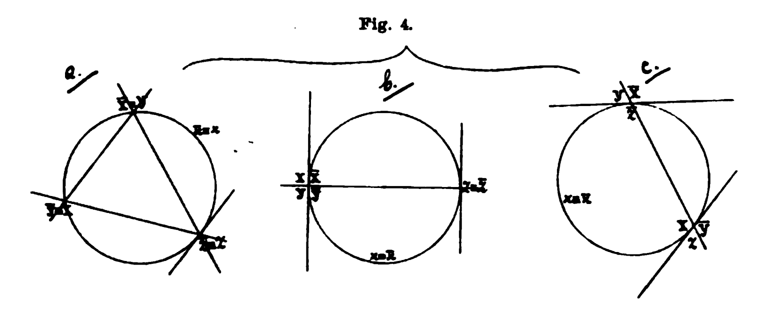
45. Wie gestaltet sich die Construction des einem Hauptstrahle entsprechenden Hauptstrahles im andern

Systeme? Sehr einfach folgend. Ist z. B. x ein Element des Hauptstrahlenbüschels X, so ziehen wir zu x gleichlaufend durch Z, mit welchem sich das Perspectivitätscentrum $\overline{S}$ vereinigt, eine Gerade; diese trifft den Hauptkreis in einem Punkte, der mit dem homologen Punkte $\overline{X}$ (in Coincidenz mit Y) verbunden, den gesuchten Strahl $\overline{x}$ angibt.

Die Construction für den entsprechenden Strahl eines Hauptstrahles der Punkte $Z\overline{Z}$ vereinfacht sich wegen des Zusammenfalles des bezüglichen Perspectivitätscentrums in ihm. Ein Strahl z des Büschels Z trifft den Hauptkreis in einem Punkte, der mit $\overline{Z}$ verbunden, unmittelbar die gesuchte Gerade angibt.

46. Von den Lagen (Fig. 4), welche die beiden Hauptdreiecke XYZ, $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ auf dem Coincidenzkreis $\varkappa$

Fig. 4.



annehmen können, sind noch drei bemerkenswerth.

a) Sind nämlich die beiden Kreissehnen $|XY|$, $|\overline{X}\overline{Y}|$ den Voraussetzungen gemäss verkehrt auf einander liegend, so dass $X\overline{Y}$, $Y\overline{X}$ Coincidenzen bilden, so kann die Kreissehne $|Z\overline{Z}|$ schliesslich Tangente an den Kreis werden, in welchem Falle sich die

Punkte $Z\bar{Z}$ vereinigen und die beiden Hauptdreiecke zwei congruente gleichschenklige Dreiecke sind, die mit ihren Grundlinien verkehrt aufeinander liegen und einen gemeinschaftlichen Scheitel besitzen.

b) Der zweite Fall ergibt sich, indem gleichzeitig das zuletzt erhaltene Resultat beibehalten wird, wenn die Kreissehne $|XY| \equiv |\bar{X}\bar{Y}|$ zur Kreistangente wird. Die beiden Hauptdreiecke werden diesfalls von einem Durchmesser und der in dem einen Endpunkte desselben gehenden Kreistangente repräsentirt.

c) Im dritten Falle können die beiden Geraden $|XY| \equiv |\bar{Y}\bar{X}|$ und $Z\bar{Z}$ zusammenfallen. Jedes der Hauptdreiecke besteht dann aus der gemeinschaftlichen Sehne $|XY| \equiv |\bar{Y}\bar{X}|$ und der betreffenden, in einem Endpunkte dieser Sehne gehenden Kreistangente.

47. Wenn man die Anordnung der quadratischen Verwandtschaft gemäss (44) getroffen hat, so zeigt eine einfache geometrische Ueberlegung, dass sich die (42) beiden reellen Doppelpunkte der Beziehung mit dem Coincidenzpaare $X\bar{Y}$, $Y\bar{Z}$ in (44) identificiren. Ebenso ist unschwer einzusehen, dass der eine der drei sich schneidenden Kreise in (42) der Coincidenzhauptkreis ist.

48. Nachstehende Gegenüberstellung einander bildlich entsprechender Gebilde in einer quadratischen Transformation zweier ebenen Systeme $\Sigma\bar{\Sigma}$, wenn die ∞ fernen imaginären Kreispunkte als Doppelpunkte

der Beziehung und die Situation der Hauptdreiecke in (44) gedacht wird, diene zur Uebersicht:

In dem Systeme Σ	in dem Systeme $\overline{\Sigma}$
entsprechen	
a) Einem bestimmten Punkte A:	ein bestimmter Punkt $\overline{A}$.
b) Den einzelnen Hauptpunkten XYZ:	die gesammten Punkte der Seiten $\lvert\overline{Y}\overline{Z}\rvert$, $\lvert\overline{X}\overline{Z}\rvert$, $\lvert\overline{X}\overline{Y}\rvert$.
c) Den drei Strahlenbüscheln XYZ:	die drei Strahlenbüschel $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$.
d) Einer beliebigen Geraden, die durch keinen der Hauptpunkte XYZ geht:	ein Kegelschnitt, der dem Hauptdreieck $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}$ umschrieben ist.
e) Der Richtung einer beliebigen Geraden:	ein bestimmter Punkt auf dem Hauptkreise.
f) Der ∞ fernen Geraden:	der Hauptkreis.
g) Einem Strahlenbüschel mit dem Centrum C:	ein Kegelschnittsbüschel mit den Grundpunkten $\overline{X}\overline{Y}\overline{Z}\overline{C}$.
h) Einem Kegelschnitte, der durch zwei Hauptpunkte geht:	ein Kegelschnitt, der durch die homologen zwei Hauptpunkte geht.
i) Einem Kegelschnitte, der durch einen Hauptpunkt geht:	eine Curve 3ter Ordnung, die den homologen Hauptpunkt als Doppelpunkt hat.

k) Einem Kegelschnitte, welcher keinen der Hauptpunkte enthält:	eine Curve 4ter Ordnung, welche die drei Hauptpunkte als Doppelpunkte hat.
l) Einer Curve n^{ter} Ordnung, welche keinen der Hauptpunkte enthält:	im Allgemeinen eine Curve $2n^{ter}$ Ordnung, welche die Hauptpunkte als n-fache Punkte enthält.

49. Ausser den im vorigen näher bezeichneten Steiner'schen Verwandtschaftsfällen zweier ebener Systeme kann man noch vielfach ähnliche Beziehungen aufstellen. Insbesonders wird die polarreciproke Beziehung weitere neue Eigenthümlichkeiten solcher Verwandtschaft zeigen. Wir wollen an diesem Orte nur auf einen Fall dieser Art hinweisen.

Denkt man sich in der Ebene wieder zwei Systeme vereinigt und die Annahmen in (34) etc. polarisirt, so wird ein in der Ebene beliebig gewähltes Dreiseit xyz eine Steiner'sche Verwandtschaft etabliren. Diese Figur heisst das Hauptdreiseit, seine Seiten sind die Hauptlinien und seine Ecken die Hauptpunkte. Dabei hat man sich in dieser Figur zwei Dreiseite, wovon jedes dem bezüglichen Systeme angehört, vereinigt zu denken.

Die quadratische Beziehung lässt sodann einem Punkte in dem einen Systeme eine Gerade als Strahl in dem anderen Systeme bildlich entsprechen. Einer beliebigen Geraden als Träger eines Punkten-

systems hingegen entspricht als Bild ein Kegelschnitt, welcher dem Dreiseit xyz eingeschrieben ist.

Wenn demnach insbesondere ein Strahlenbüschel gegeben ist, so bildet sich dasselbe als eine Schaar von Kegelschnitten ab, die alle die Seiten von xyz berühren und ausserdem als vierte gemeinschaftliche Tangente die Gerade, welche als das Bild des Büschelmittelpunktes erscheint, besitzen, u. s. w.

50. Die Gesetze der Involution können in gewissem Sinne gleichfalls zur Grundlage einer quadratischen Transformation in einer Ebene gemacht werden, wobei selbstverständlich ein Sichentsprechen von Punkten zu denken ist. Darnach wird also ein beliebiges Punktengebilde vom n^{ten} Grade in ein solches vom $2n^{\text{ten}}$ Grade transformirt, in welchen Gebilden gegenseitig die einzelnen Punktenpaare in ihren Elementen vertauschungsfähig oder involutorisch sind. Man nennt diese Verwandtschaft: Inversion und die von einander abgeleiteten Gebilde sind im Allgemeinen inverse Curven.

Der Unterschied zwischen Inversion und einer Steiner'schen Verwandtschaft liegt demgemäss nur in dem involutorischen Verhalten sich entsprechender Punkte; im Uebrigen sind die Beziehungen analoge. Die Involutorität verbindet jedoch gewisse Auszeichnungen und Specialisirungen, die hervorgehoben werden sollen.

51. Zur Grundlage einer Inversion dient (Fig. 5) ein Kegelschnitt $\varkappa$ und ein Punkt O_1; wir heissen den ersteren den Inversionskegelschnitt und letzteren das Inversionscentrum. Die Polare o_1 von O_1 bezugs $\varkappa$ ist die Inversionsaxe, welche den Kegelschnitt in den Punkten $O_2 O_3$ trifft, so dass diese letzteren die Berührpunkte der aus O_1 an $\varkappa$ gezogenen Tangenten $o_3 o_2$ sind. Es sei die identische Figur $O_1 O_2 O_3 \equiv o_3 o_2 o_1$ das Hauptdreieck genannt, und wir denken uns dasselbe mit einem zweiten, ihm congruenten Dreiecke $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ derart in Deckung, dass die Coincidenzen der Ecken $O_1 \equiv \overline{O}_1$, $O_2 \equiv \overline{O}_3$, $O_3 \equiv \overline{O}_2$ und folglich auch der Seiten $o_1 \equiv \overline{o}_1$, $o_2 \equiv \overline{o}_3$, $o_3 \equiv \overline{o}_2$ stattfinden. Auf diese Weise kann man sich wieder die Ebene als den Träger zweier Systeme $\Sigma \overline{\Sigma}$ vorstellen, welche durch die Dreiecke $O_1 O_2 O_3$, $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ in Beziehung sind. Zieht man aus dem Centrum O_1 einen beliebigen Strahl x, auf dem ein beliebiger Punkt $\overline{X}$ liegt, so ist der letztere einem zweiten Punkte X desselben Strahles x harmonisch in Bezug des Kegelschnittes $\varkappa$ conjugirt. Diesfalls muss man sich also den x-Strahl in Deckung mit einem $\overline{x}$-Strahl denken, wovon der erstere die Verbindungslinie $|O_1 X|$, der letztere aber die Gerade $|\overline{O}_1 \overline{X}|$ repräsentirt. Die einfachste Construction des X-Punktes geschieht, indem wir den $\overline{X}$-Punkt aus den beiden Hauptpunkten $\overline{O}_2 \overline{O}_3$

Fig. 5.

auf den Inversionskegelschnitt $\varkappa$ nach $\xi_2 \xi_3$ projiciren, womit dann gemeinschaftlich auf dem x-Strahle erfolgt:

$$(|\overline{O_2 \xi_3}|, |\overline{O_3 \xi_2}|) = X.$$

52. Wenngleich bereits ausdrücklich bemerkt wurde, dass die allgemeinen Beziehungen, die in einer Inversion stattfinden, gleichzuhalten sind denjenigen, die in der quadratischen Punktenverwandtschaft überhaupt Gesetz sind, so wollen wir doch nachstehend, wegen später folgender Bezugnahmen, die Hauptsachen gegenüberstellen:

Es entspricht bildlich	invers:
a) Einem beliebigen Punkte $\overline{X}$ auf einem x-Strahle des Inversionscentrums O_1:	ein bestimmter Punkt X harmonisch bezugs des Inversionskegelschnitts $\varkappa$ auf demselben x-Strahle;
b) einem beliebigen Punkte $\overline{X}$ der Hauptlinien $o_2 o_3$:	ein bestimmter Punkt X der Hauptlinien $o_2 o_3$, welcher harmonisch durch die Punkte $O_1 O_2$ resp. $O_1 O_3$ geschieden ist;
c) einem Strahle der Hauptpunkte $O_2 O_3$:	ein Strahl der Hauptpunkte $O_3 O_2$;
d) einer beliebigen Geraden $\overline{g}$ der Ebene, welche keinen der Hauptpunkte $O_1 O_2 O_3$ enthält:	ein bestimmter Kegelschnitt γ, der dem Dreiecke $O_1 O_2 O_3$ umschrieben ist;
e) einem Kegelschnitte, der	eine Curve 4ter Ordnung

keinen der Hauptpunkte $O_1 O_2 O_3$ enthält:	mit den Doppelpunkten $O_1 O_2 O_3$;
f) einem Kegelschnitte, der nur einen Hauptpunkt durchzieht:	eine Curve 3ter Ordnung mit einem Doppelpunkte in dem homologen Hauptpunkte;
g) einem Kegelschnitte, der durch zwei Hauptpunkte läuft:	ein Kegelschnitt, der durch die homologen Hauptpunkte läuft;
h) einer Curve, welche eine Hauptlinie $o_1 o_2 o_3$ n-mal durchsetzt:	eine Curve, die den gegenüberliegenden Hauptpunkt $O_1 O_2 O_3$ n-mal durchsetzt.

Zweiter Theil.

Die Unicursal-Plancurven vierter Ordnung.

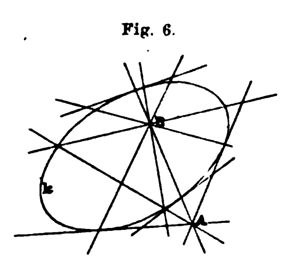
Erster Abschnitt.

Erzeugnisse doppeldeutiger Strahlenbüschel.

§ 1. Ordnung und Classe.

53. Betrachtet man (Fig. 6) in der Ebene irgend einen Kegelschnitt k und zwei beliebige, nicht auf demselben liegende Punkte AB als Mittelpunkte von Strahlenbüscheln, so trifft jeder Strahl des Büschels A den Kegelschnitt in einem (reellen oder imaginären) Punktenpaare; den einzelnen Elementen dieses Paares entspricht jedesmal ein Strahl des Büschels B als Verbindungslinie des Centrums B mit dem einen der beiden Punktenelemente des A-Strahles auf dem Kegelschnitte.

Fig. 6.



In gleicher Weise entsprechen einem beliebigen Strahle des Büschels B ein Paar Strahlenelemente des Büschels A. Wir sehen also, dass die beiden Strahlenbüschel AB zwei-zweideutig (doppeldeutig) sind, und dass ihr gemeinsames Erzeugniss als Punktengebilde, in dessen Elementen sich je zwei entsprechende Strahlenelemente treffen, der Kegelschnitt k ist.

In der Verbindungslinie $|AB|$ der beiden Büschelcentra liegen offenbar zwei Paare von entsprechenden Strahlen, weshalb diese Gerade auch zwei Punkte (reell oder imaginär) des Kegelschnittserzeugnisses enthalten muss. Man sieht nun leicht ein, dass die beiden Strahlenbüschel AB sich nach (32) in reducirter Lage 2ter Ordnung befinden und dass die Verbindungslinie $|AB|$ das Reductionsstrahlenpaar 2ter Ordnung vereinigt. Ihr Erzeugniss heisst „der Reductionskegelschnitt".

54. Wenn in (32) $m = n = r = 2$ ist, sind die Mittelpunkte AB für den Reductionskegelschnitt k o-fache Punkte, d. h. sie gehören nicht der Curve an. Man erkennt ferner die beiden erzeugenden Strahlenbüschel AB als projectivische Involutionsgebilde 2ten Grades, deren Erzeugniss nach (33) eine Curve 2ter Ordnung und Classe, der Reductionskegelschnitt, sein muss.

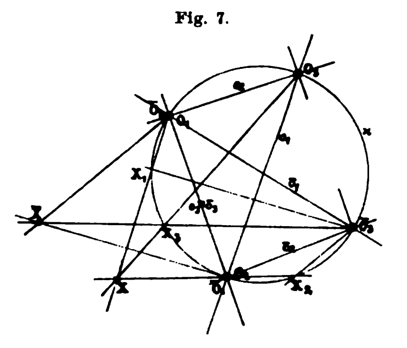
Aus jedem Centrum der Strahleninvolutionen AB ziehen (reell od. imaginär) an den Reductionskegelschnitt ein Paar Tangenten; sie bilden mit den ihnen perspectivischen Berührungspunkten die Verzweigungselemente der betreffenden Involution. Den Verzweigungselementen in jedem der Involutionsgebilde entsprechen (reell od. imaginär) ein Paar Doppelstrahlen der anderen Involution, nämlich die Verbindungslinien eines jeden Verzweigungspunktes auf dem Kegelschnitte mit dem Centrum dieser anderen Involution.

55. Bringt man die Punkte der Ebene des in (53) betrachteten Kegelschnitts k in eine quadratische Beziehung, so wird die reducirte Lage der beiden erzeugenden Involutionsgebilde aufgehoben, und es ergeben sich bildlich zwei doppeldeutige Strahlenbüschel, welche reductionsfähig 2ter Ordnung sind. Deren Erzeugniss wäre nach (31) eine allgemeine Curve $(m+n) = 4^{\text{ter}}$ Ordnung, $2mn = 8^{\text{ter}}$ Classe, mit zwei zweifachen Punkten (Doppelpunkten) in den Bildern von AB.

Weil aber die Büschelbilder AB das nun nicht mehr vereinigte Reductionsstrahlenpaar besitzen, welches ebenfalls (32) einen Doppelpunkt der Curve erzeugt, so degenerirt nach (9) die Classe um $2(2-1) = 2$ Einheiten, d. h. die Classe der Curve ist $8 - 2 = 6$. Die Curve, welche also das Bild im Sinne der quadratischen Verwandtschaft des Reductionskegelschnitts (Grundkegelschnitt) darstellt, ist eine Curve 4ter Ordnung, 6ter Classe mit drei Doppelpunkten — also nach (6) eine „Unicursalcurve“ — und wir bezeichnen sie mit dem Symbole: C_6^4.

56. Um die Construction möglichst einfach zu gestalten, verwenden wir (Fig. 7) die in (44) bezeichnete Anordnung der Hauptdreiecke und zwar so, dass wir die beiden Bilder der Büschelmittelpunkte AB in die Coincidenzpaare $X\overline{Y}$, $Y\overline{X}$ verlegen,

Fig. 7.



während der Schnittpunkt des abgebildeten Reductionsstrahlenpaares auf den Punkt $\bar{Z}$ zu liegen kommen soll. Ferner sei der Einfachheit wegen die Bezeichnung der Hauptpunkte derart vorgenommen, dass $X\bar{Y} \equiv O_1$, $Y\bar{X} \equiv O_2$, $Z \equiv O_3$ und $\bar{Z} \equiv \bar{O}_3$, so dass also die homologen Hauptpunktenpaare (42) in den beiden Systemen $\bar{\Sigma}\Sigma$ (System des Grundkegelschnitts k und System der Curve C_6^4) sind: $O_1 O_2$, $O_2 O_1$, $\bar{O}_3 O_3$.

Bemerkung: Um jedem Missverständnisse in der künftig einzuhaltenden Bezeichnungsweise vorzubeugen, betrachten wir die beiden Hauptdreiecke der Systeme $\Sigma\bar{\Sigma}$ zunächst separat und bezeichnen sie: $O_1 O_2 O_3$, $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$, und als Seitenfiguren: $o_1 o_2 o_3$, $\bar{o}_1 \bar{o}_2 \bar{o}_3$, wobei die Seite $o_1 \equiv | O_2 O_3 |$ dem Punkte O_1 gegenüberliegt etc. und wobei ferner eigentlich die Hauptpunktenpaare $O_1 \bar{O}_1$, etc. sowie die Hauptlinienpaare $o_1 \bar{o}_1$, etc. als homologe Elemente bezeichnet werden mögen. Da wir uns aber die Hauptdreiecke verkehrt aufeinander in der Art liegend denken, dass der Punkt O_1 mit dem Punkte $\bar{O}_2$ und ebenfalls die Punkte $O_2 \bar{O}_1$, somit auch die Linien $o_3 \bar{o}_3$ zur Deckung gelangen, so erscheint die vorhin bemerkte Eigenschaft, die Punkte in dem Paare $O_1 O_2$ gegenseitig als homolog zu bezeichnen, insofern gerechtfertigt, als damit jeder von ihnen in einem der zwei verschiedenen Systeme anzunehmen ist. Demzufolge drückt also das Punktenpaar $O_1 O_2$ in seiner Eigenschaft als ein Paar homologer Hauptpunkte, genau genommen, die doppelte Coincidenz aus: $O_1 \bar{O}_1$, wobei $\bar{O}_1 \equiv O_2$, und $O_2 \bar{O}_2$, wobei $\bar{O}_2 \equiv O_1$ ist. Aus denselben Gründen geschieht die Bezeichnung der Hauptlinien in der Weise: $| O_1 O_2 | \equiv | \bar{O}_1 \bar{O}_2 | \equiv o_3 \equiv \bar{o}_3$; $| O_1 O_3 | \equiv o_2$; $| O_2 O_3 | \equiv o_1$; $| O_2 \bar{O}_3 | \equiv | \bar{O}_1 \bar{O}_3 | \equiv \bar{o}_2$; $| O_1 \bar{O}_3 | \equiv | \bar{O}_2 \bar{O}_3 | \equiv \bar{o}_1$.

57. Unter diesen Voraussetzungen nehme man in der Ebene ein Dreieck $O_1 O_2 \bar{O}_3$ an, schlage um dasselbe einen Kreis $\varkappa$, so ist ersteres das Hauptdreieck des Systems $\bar{\Sigma}$ und letzterer der Hauptkreis. Sodann ziehe man durch $\bar{O}_3$ die mit $| O_1 O_2 |$ gleichlaufende Gerade, welche den Hauptkreis in O_3 schneidet. Solcherart stellt dann gleichzeitig $\bar{O}_3$ das Perspectivitätscentrum in Σ und O_3 jenes in Σ vor.

Der Bemerkung des vor. Art. zufolge muss das Punktenpaar $O_1 O_2$ den beiden gedachten Systemen $\Sigma\overline{\Sigma}$ gleichzeitig zugerechnet werden. Sofern wir also von dem Punkte O_1 sprechen, werden wir ihn im Systeme Σ ebenfalls mit O_1 bezeichnen, wogegen er als Hauptpunkt des $\overline{\Sigma}$-Systems stillschweigend als $\overline{O}_2$ zu denken ist. Dasselbe findet mit dem O_2-Punkte statt, welcher als Hauptpunkt in Σ mit O_2 angeschrieben ist, als Hauptpunkt des $\overline{\Sigma}$-Systems aber mit der Bezeichnung $\overline{O}_1$ zu denken ist. Analog ist die Gerade $|O_1 O_2|$ mit o_3 bezeichnet, wenn sie Hauptlinie in Σ ist, und sie ist mit $\bar{o}_3$ bezeichnet, wenn sie als Hauptlinie $|\overline{O}_1 \overline{O}_2|$ in $\overline{\Sigma}$ gedacht wird.

58. Ein beliebiger Grundkegelschnitt k des Systems $\overline{\Sigma}$, welcher eine solche Lage hat, dass er keinen der Hauptpunkte $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ auf sich enthält, bildet sich (55) als eine Unicursal-Curve C_6^4 in Σ ab, welche die Hauptpunkte $O_1 O_2 O_3$ als Doppelpunkte aufweist.

Die punktenweise Bestimmung der C_6^4 wird folgende Construction zeigen. Ist $\overline{X}$ ein Punkt des Grundkegelschnitts, so fesseln wir denselben durch zwei Hauptstrahlen (42). Nun construiren wir die bildlich entsprechenden Hauptstrahlen (45) und erhalten in ihrem Schnitte das gesuchte Bild X. Z. B.: wird in Fig. 7. $\overline{X}$ mit $\overline{O}_1 \equiv O_2$ verbunden und zu dieser Geraden durch $\overline{O}_3$, als Perspectivitätscentrum von Σ, eine Parallele gezogen, so ist die Verbindungslinie des Kreisschnitts der letzteren mit dem homologen Hauptpunkte O_1 der

gesuchte Bildstrahl. Ebenso werden wir mit dem aus $\bar{O}_2 \equiv O_1$ nach $\bar{X}$ gezogenen Hauptstrahle verfahren. Endlich erinnere man sich der Vereinfachung in der Construction des aus $\bar{O}_3$ nach $\bar{X}$ gezogenen Hauptstrahles in (45) und bemerke ferner, dass sich die Bilder aller drei aus $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ nach $\bar{X}$ gezogenen Hauptstrahlen gemeinsam in dem Punkte X treffen müssen.

Der $\bar{X}$-Punkt kann ein Element der unendlich fernen Geraden $g\infty$ sein, wo wir ihn dann durch die Identität: $\bar{X} \equiv \bar{U}\infty$ bezeichnen wollen. In Folge der Beziehungen eines Hauptkreises in (41) wird das Bild des Punktes $\bar{U}\infty$ ein U-Punkt unseres Hauptkreises $\varkappa$ sein müssen. In der That, wenn wir den $\bar{U}\infty$-Punkt durch Strahlen der Hauptpunkte $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ anbinden, so werden diese nothwendig zu einander gleichlaufend, und ihre homologen Strahlen der Hauptpunkte $O_1 O_2 O_3$ im Systeme Σ müssen sich deshalb gemeinsam in einem und demselben U-Punkte des Hauptkreises $\varkappa$ treffen (48. e).

59. Es wird ohne Schwierigkeit eingesehen werden, dass die drei Hauptpunkte $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ im Systeme des Grundkegelschnitts nichts anderes bilden, als die Mittelpunkte von drei Paaren projectivischen Strahleninvolutionen 2ten Grades in deren Verbindungslinien $\bar{o}_1 \bar{o}_2 \bar{o}_3$, den Seiten des Hauptdreieckes $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$, sich jedesmal zwei zweifache Strahlen vereinigen, und dass also nach (33) das identisch gemeinsame Erzeugniss derselben einerseits der Grundkegelschnitt k, andererseits dessen

Bild, die Curve C_6^4, nothwendig sein muss. Ebenso ist leicht zu erkennen, dass die Hauptpunkte $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ sich in drei Paare Centra von je zwei-zweideutigen Strahlenbüscheln combiniren, deren jedes Paar die betreffende Seite des Hauptdreiecks als ein Reductionsstrahlenpaar 2ter Ordnung besitzt, und dass also diese drei Paare für ihr gemeinsames Erzeugniss, den Reductionskegelschnitt k, in reducirter Lage sind; dass aber die Bilder dieser Büschel nicht mehr reducirt erscheinen, demnach ihr gemeinsames Erzeugniss die Curve C_6^4 sein muss, welche die homologen Hauptpunkte einerseits als Doppelpunkte, indem sie Bilder der Büschelcentra sind, andererseits identisch wieder als Doppelpunkte, indem sie Schnittpunkte der drei abgebildeten Reductionsstrahlenpaare sind, besitzt.

Zugleich bestätigt sich die in (55) angegebene Classenzahl, wenn wir das Curvenerzeugniss C_6^4 nach der Formel in (8) behandeln. Da die Curve drei Doppelpunkte besitzt, so ist $d = 3$ und die Classe $= 4\,(4-1) - 2 \cdot 3 = 6$.

§ 2. Die Sekante.

60. Wegen der Ordnung der Plancurve C_6^4 besitzt diese Curve mit einer beliebigen Geraden g ihrer Ebene nach (1) höchstens vier Punkte als Sekantenelemente gemeinschaftlich, welche demnach eine vierpunktige Gruppe (Quadrupel) auf der Geraden g als Sekante der Curve vorstellen.

Ist die Gerade g als Träger gegeben, so wissen wir, dass ihr (48. d) auf dem Grundkegelschnitte k ein

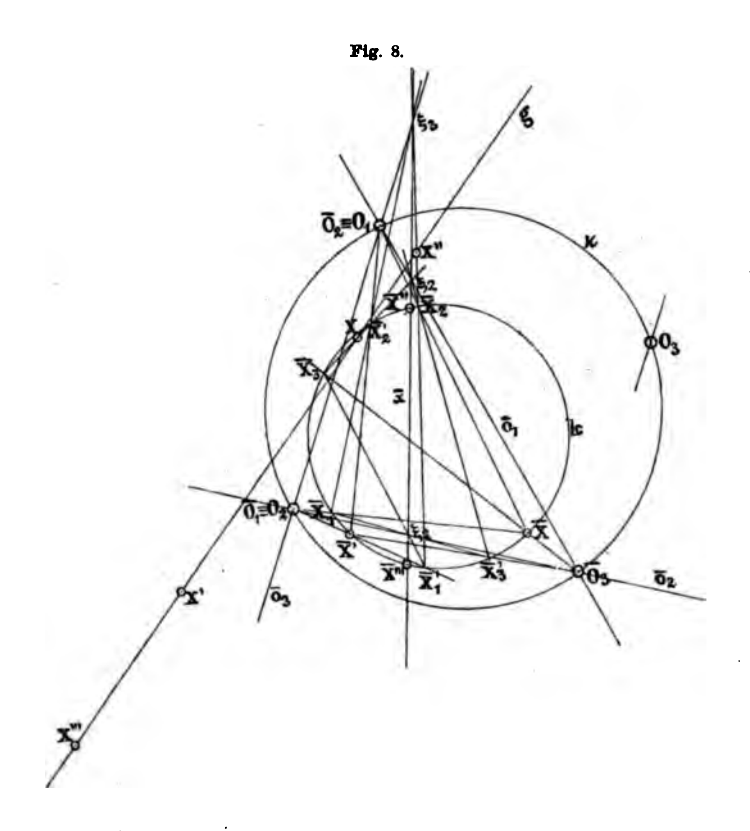
Kegelschnitt γ entspricht, welcher dem Hauptdreiecke $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ umschrieben ist. Sofern man zwei beliebige Punkte der g-Geraden abbildet, ist der Kegelschnitt γ durch diese beiden Punktenbilder und das Punktentripel $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ mit fünf Elementen ausreichend bestimmt und es kommt jetzt nur mehr darauf an, die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte $k\gamma$ nach bekannten Elementarconstructionen zu fixiren. Die Bilder der gefundenen Schnittpunkte sind die gesuchten Sekantenpunkte von γ mit C_6^4.

61. Sind (Fig. 8) von dem Punktenquadrupel $XX'X''X'''$, welches die Sekante g mit der Plancurve C_6^4 gemein hat, zwei Elemente XX' bekannt und soll das Elementenpaar $X''X'''$ gesucht werden, so lässt sich diese Aufgabe linear folgend lösen.

$\overline{X}\overline{X}'$ sind die Bilder des Paares XX' und werden nach (58) erhalten. Projicirt man den Hauptpunkt $\overline{O}_1$ aus XX' auf den Grundkegelschnitt k nach $\overline{X}_1\overline{X}_1'$, und denkt man sich den Punkt $\overline{O}_1$ die Bahn des Kegelschnitts γ durchlaufend, so entstehen in $\overline{X}\overline{X}'$ als Centra zwei projectivische Strahlenbüschel, welche den Kegelschnitt γ erzeugen und die Centra $\overline{X}\overline{X}'$ als Punkte dieses Kegelschnitts enthalten. Gleichzeitig beschreiben bei dieser Bewegung des Punktes $\overline{O}_1$ die Punkte $\overline{X}_1\overline{X}_1'$ auf dem Grundkegelschnitte k zwei projectivische Punktensysteme, deren Doppelelemente offenbar die zwischen den Kegelschnitten $k\gamma$ gemeinsamen übrigen beiden Punkte $\overline{X}''\overline{X}'''$ sein müssen.

Behält man nun im Auge, dass der sich bewegende Punkt $\overline{O}_1$ den Kegelschnitt γ beschreibt, also der Voraussetzung gemäss auf seinem Wege auch mit den Hauptpunkten $\overline{O}_2\overline{O}_3$ zusammenkommen soll, so ist leicht einzusehen, dass die beiden Strahlenbüschel $\overline{X}\overline{X}'$

Fig. 8.



auf dem Kegelschnitte k auch dieses Punktenpaar $\overline{O}_2\overline{O}_3$ als Elemente der zwei projectivischen Punktensysteme in den Paaren $\overline{X}_2\overline{X}_2'$, $\overline{X}_3\overline{X}_3'$ anschneiden werden. Hierbei sind, analog wie vorhin, die Punkte $\overline{X}_2\overline{X}_3$, $\overline{X}_2'\overline{X}_3'$ die Projectionen der Hauptpunkte $\overline{O}_2\overline{O}_3$ auf dem Grundkegelschnitte aus den gegebenen $\overline{X}\overline{X}'$-Punkten. Es

werden somit auf dem Grundkegelschnitt k die Paare $\overline{X}_1\overline{X}_1'$, $\overline{X}_2\overline{X}_2'$, $\overline{X}_3\overline{X}_3'$ erhalten, wodurch bekanntlich die Projectivität der beiden Punktensysteme als vollkommen bestimmt erscheint.

Die wechselweisen Verbindungslinien ergeben folgende Schnitte:

$$(|\overline{X}_1\overline{X}_2'|, \quad |\overline{X}_2\overline{X}_1'|) = \xi_3$$
$$(|\overline{X}_1\overline{X}_3'|, \quad |\overline{X}_3\overline{X}_1'|) = \xi_2$$
$$(|\overline{X}_2\overline{X}_3'|, \quad |\overline{X}_3\overline{X}_2'|) = \xi_1$$

Die auf dem Grundkegelschnitt bezeichneten Punkte $\overline{X\,X'\,X_1X_2X_3X_1'X_2'X_3'}$ gruppiren sich in drei Sechsecken: $\overline{X\,X_1X_2'X'X_1'X_2}$; $\overline{X\,X_1X_3'X'X_1'X_3}$; $\overline{X\,X_2X_3'X'X_2'X_3}$. Die Pascal'schen Geraden dieser drei Sechsecke sind aber die Seiten $|\overline{O}_1\overline{O}_2| \equiv \overline{o}_3$, $|\overline{O}_1\overline{O}_3| \equiv \overline{o}_2$, $|\overline{O}_2\overline{O}_3| \equiv \overline{o}_1$ des Hauptdreiecks, so dass also auf diesen Seiten der Reihe nach die erhaltenen Schnittpunkte $\xi_3\xi_2\xi_1$ liegen müssen. Diese Schnittpunkte $\xi_3\xi_2\xi_1$ liegen nun aber gleichzeitig auf einer einzigen Geraden $\overline{x}$, welche die fraglichen Doppelpunkte $\overline{X}''\overline{X}'''$ der beiden auf dem Grundkegelschnitt k hervorgerufenen projectivischen Punktensysteme herausschneidet.

Bildet man jetzt die zuletzt erhaltenen Punkte $\overline{X}''\overline{X}'''$ nach dem Constructionsgesetze (58) als die Punkte $X''X'''$ auf der Geraden g ab, so geben diese die restlichen Schnittelemente dieser Geraden mit der Plancurve C_6^4 an.

62. Die Gerade $\overline{x}$ in (61) ist unter allen Umständen eine reelle Gerade; ihre Schnittpunkte mit dem Grund-

kegelschnitte k können jedoch reell oder imaginär sein; letzteres hat zur Folge, dass dann die Sekante g die Curve C_6^4 ebenfalls in nur zwei reellen (den angegebenen) Punkten und in zwei imaginären Punkten trifft.

Dass die Elemente des in (61) bezeichneten X-Quadrupels einer Sekante g theilweise Coincidenzen formiren können, liegt auf der Hand, und es wird unsere Aufgabe sein müssen, die diesbezüglichen Fälle solcher Coincidenzen in der Folge ebenfalls in den Kreis der Betrachtung zu ziehen.

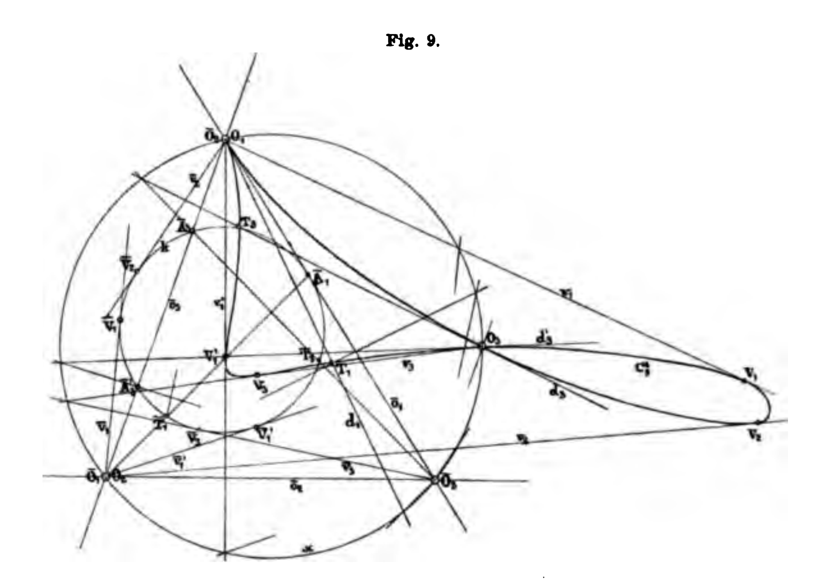
63. Läuft die g-Gerade als Hauptstrahl durch einen Hauptpunkt, dann enthält sie in ihm schon zwei ihrer vier Schnittpunkte. Man sieht unschwer ein, dass das Bild dieses Hauptstrahles — die betreffende $\bar{x}$-Gerade als der homologe Hauptstrahl — die beiden übrigen Schnitte desselben als Bilder aus dem Grundkegelschnitt schneidet. Dabei ist es gleichgiltig, ob der Hauptpunkt als Doppelpunkt der Plancurve ein eigentlicher oder isolirter Punkt ist. Die Construction homolog entsprechender Hauptstrahlen haben wir in (58) erklärt. Dabei möge nicht vergessen werden, dass die Seiten des Hauptdreiecks $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$, welche in Paaren durch jeden Hauptpunkt laufen, eine singulare Rolle spielen, weil ihnen nach (48. b) nicht wieder die Seiten, sondern die Ecken, und zwar im homologen Sinne, des Hauptdreiecks $O_1 O_2 O_3$ entsprechen.

§ 3. Die Doppelpunkte der Curve.

64. Das Wesen der Doppelpunkte hat in den vorstehenden Erörterungen zum grössten Theile bereits seine Erklärung gefunden. Doch wollen wir noch auf eine Eigenthümlichkeit aufmerksam machen.

Denken wir uns (Fig. 9) die Abbildung der Plancurve C_6^4 auf dem Grundkegelschnitte k vollzogen, so

Fig. 9.



wissen wir, dass einem Doppelpunkte als Bild jene beiden Punkte $\overline{A}\overline{A}'$ des Kegelschnitts k entsprechen, in denen derselbe von der, diesem Punkte als Hauptpunkt entsprechenden Seite des Dreiecks $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ nach (48. b) geschnitten wird, an welche Eigenschaft eben im vor. Art. erinnert wurde. Die Bilder dieser beiden letzteren Schnittpunkte situiren sich somit auf der Curve unendlich nahe als der betreffende Doppelpunkt,

weshalb dieselben auch die (unendlich nahen) Nachbarpunkte desselben genannt werden.

Trifft die betreffende Seite des Hauptdreiecks den Grundkegelschnitt reell, so sind die beiden Nachbarpunkte und ihr Repräsentant, der Doppelpunkt, eigentliche Punkte; im andern Falle entsteht der isolirte Doppelpunkt, wenn nämlich die Seite des Hauptdreiecks $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ den Grundkegelschnitt in einem imaginären Paar $\bar{A}\bar{A}'$ Nachbarpunkten schneidet. Immerhin aber sind die Doppelpunkte einer Plancurve C_6^4 reelle Punkte, ob nun ihre Bilder (die Nachbarpunktenpaare) im Systeme des Grundkegelschnitts reelle oder imaginäre Punkte sind.

Als Uebergangsfall ist der Rückkehrpunkt (6) anzusehen. Wenn nämlich eine Seite des Hauptdreiecks $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ Tangente des Grundkegelschnitts wird, dann rücken die beiden Nachbarpunkte $\bar{A}\bar{A}'$ auf derselben unendlich nahe und das Bild dieser Coincidenz ist auf der Curve eine Spitze oder ein Rückkehrpunkt.

65. Im allgemeinen Theile (4) wurde angegeben, dass eine Plancurve n^{ter} Ordnung durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Elemente, in welchen ein r-faches Element für $\frac{r(r+1)}{2}$ zählt, bestimmt ist. Wir erhalten demnach für die Plancurve C_6^4: $\frac{4(4+3)}{2} = 14$ einfache Bestimmungselemente. Hat man von einer Plancurve C_6^4 die drei Doppelpunkte angegeben, so zählen (4) dieselben:

$3 \cdot \frac{2(2+1)}{2} = 9$ einfache Elemente, folglich müssen noch 5 einfache Elemente zu deren Bestimmung bekannt sein.

Sind nun die drei Doppelpunkte $O_1 O_2 O_3$ und ausserdem noch fünf beliebige einfache Punkte derselben vorhanden, so sieht man sogleich, dass diese Angabe ausreichend ist, indem diese fünf Punkte, abgebildet im Systeme des Hauptdreiecks $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$, den entsprechenden Grundkegelschnitt k vollständig fixiren.

66. In jedem eigentlichen Doppelpunkte schneiden sich zwei Aeste der Plancurve C_6^4 und dieser Doppelpunkt scheidet von der Curve einen Theil aus, welcher „Schleife" oder „Schlinge" genannt wird. Ein isolirter Doppelpunkt besitzt keine Schleife und überhaupt keinen Curvenzug. Es ist aber die Singularität eines Doppelpunktes, ob er jetzt ein eigentlicher oder ein isolirter ist, besonders dadurch charakteristisch, dass jede durch ihn laufende g-Sekante die Curve C_6^4 nur mehr in zwei Punkten treffen kann, wie schon vorhin bemerkt wurde.

Auch in einem Rückkehrpunkte treffen sich zwei Aeste einer Curve 4[ter] Ordnung, jedoch findet jetzt, unterschiedlich von einem Knoten oder Doppelpunkte, eine gegenseitige Berührung statt, wodurch die Curve daselbst eine Spitze bildet. Diese Berührung ist aber wohl zu unterscheiden von einer solchen in einem sogenannten Berührknoten, wo

sich allerdings ebenfalls zwei Curvenäste gegenseitig berühren, in ihrem Berührungselemente aber zwei Knotenpunkte zur Coincidenz bringen. Endlich kann auch noch der Fall einer Knotenspitze eintreten, in welcher nothwendig, als einer Vereinigung eines Berührknotens mit einer Spitze, alle drei Doppelelemente der Unicursalcurve 4ter Ordnung zusammenfallen. Sowohl Knoten- als auch Rückkehrpunkte können unter Umständen jedoch immer nur paarweise imaginäre Punkte sein, wie die Folge zeigen wird; bei einem Berührknoten tritt dieser Fall niemals ein.

67. Ein Kegelschnitt hat nach (10) mit einer Plancurve C_6^4 höchstens $2 \cdot 4 = 8$ Punkte gemein. Geht der Kegelschnitt durch die drei Doppelpunkte von C_6^4, so absorbiren dieselben $2 \cdot 3 = 6$ Elemente, so dass er also noch zwei Punkte auf der Curve C_6^4 ausschneidet.

Wenn zwei oder mehrere von den acht gemeinschaftlichen Elementen zusammenfallen, so entsteht eine einfache oder mehrfache Berührung zwischen dem Kegelschnitte und der Curve. Wenn also ein Kegelschnitt durch die drei Doppelpunkte einer Plancurve C_6^4 hindurchgeht, so kann zwischen ihm und der Curve vorkommendenfalls nur mehr eine einfache Berührung stattfinden. Einem solchen Kegelschnitte entspricht dann bildlich eine Tangente des Grundkegelschnitts. Da nun die Tangenten eines Kegelschnitts in ihrer Gesammtheit ein Strahlenbüschel

II. Ordnung ausmachen, so sehen wir, dass diesem Büschel ein System von Kegelschnitten bildlich in der Curve 4ter Ordnung entspricht, von welchem jedes Individuum die drei Doppelpunkte der Curve durchsetzt und sie ausserdem noch in einem Punkte einfach berührt. Dieses System bildet also nach (10) ein Kegelschnittsnetz, dessen Basispunkte die Doppelpunkte der Curve sind, und dessen einfache Enveloppe die Plancurve selbst ist. Man kann sich nun auch Kegelschnittsysteme vorstellen, deren Individuen für eine Plancurve 4ter Ordnung eine zwei-, drei- und höchstens noch viermalige Berührung haben, welche dann noch Netze mit zwei, einem oder gar keinem der Knotenelemente als Basispunkte bilden können, von welchen besonders der letztere Fall, einer viermaligen Berührung, in der Folge für uns von Wichtigkeit sein wird.

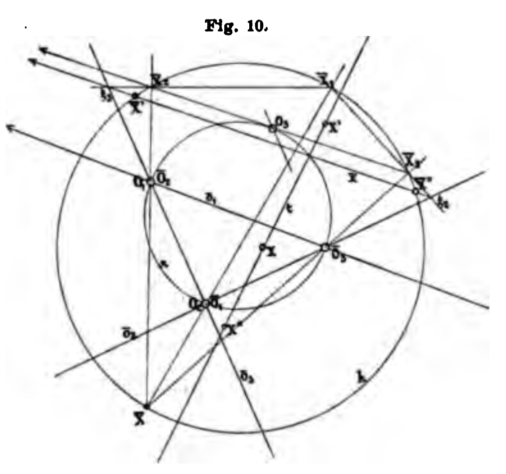
§ 4. Die einfache Curventangente.

68. Treten zwei Elemente eines geraden Punktenquadrupels einer Sekante auf der Plancurve C_6^4 in Coincidenz, so wird die Sekante zur Tangente an die Curve. Der Coincidenzpunkt ist der Berührungspunkt und die übrig bleibenden zwei Sekantenpunkte heissen die „Tangentialpunkte". Bildet man eine Curventangente t als Gerade auf dem Grundkegelschnitt k ab, so ist deren Bild ein dem Hauptdreieck $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ umschriebener Kegelschnitt τ, welcher den ersteren in einem Punkte $\overline{X}$, dem Bilde des Be-

rührungspunktes X, einfach berührt. Gleichzeitig aber schneidet dieser Kegelschnitt τ den Grundkegelschnitt in einem Punktenpaare $\overline{X}'\overline{X}''$, dessen Bilder auf der Plancurve C_6^4 die beiden Tangentialpunkte $X'X''$ der Tangente t sind.

69. Die Tangentialpunktenbilder $\overline{X}'\overline{X}''$ werden auf linearem Wege (Fig. 10) erhalten, wenn wir die in (61) erklärte Construction des Paares $\overline{X}''\overline{X}'''$ entsprechend modificiren. Zu diesem Zwecke denken wir uns das dort bezeichnete Paar $\overline{X}\overline{X}'$ jetzt als in dem Coincidenzpunkte $\overline{X}$ des Grundkegelschnitts k vereinigt. Projicirt man die Hauptpunkte $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ aus dem Centrum $\overline{X}$ auf den Grundkegelschnitt nach $\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3$, so ergibt sich dadurch ein Dreieck, welches mit dem Dreiecke $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ perspectivisch ist, wobei der Punkt $\overline{X}$ das Centrum dieser Perspectivität vorstellt. Die Perspectivitätsaxe $\overline{x}$ schneidet den Kegelschnitt k in den Bildern der gesuchten Tangentialpunkte $X'X''$.

Fig. 10.



Um die Richtigkeit dessen einzusehen, bedenke man, dass in dem vorliegenden Falle die beiden pro-

jectivischen Punktensysteme in (61) auf dem Grundkegelschnitte perspectivisch zusammenfallen. Die wechselweisen Verbindungslinien dort ergeben sich nun als Coincidenzgeraden, welche auf den Seiten $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ des Hauptdreiecks $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ der Reihe nach folgende Schnitte hervorbringen:

$$(|\bar{X}_1\bar{X}_2|, \ |\bar{O}_1\bar{O}_2|) = \xi_3$$
$$(|\bar{X}_1\bar{X}_3|, \ |\bar{O}_1\bar{O}_3|) = \xi_2$$
$$(|\bar{X}_2\bar{X}_3|, \ |\bar{O}_2\bar{O}_3|) = \xi_1$$

Das Punktentripel $\xi_1\xi_2\xi_3$ liegt auf der bezeichneten Perspectivitätsaxe $\bar{x}$.

§ 5. Singulare Tangentengattungen.

(Doppelpunkts- und Rückkehrtangenten, Verzweigungs- und Asymptotenelemente.)

70. In einem Doppelpunkte O einer ebenen Curve C_6^4 gehen zwei „Doppelpunktstangenten d". Jede derselben berührt den betreffenden der zwei Curvenzweige, welche sich in dem Doppelpunkte gegenseitig durchsetzen, in einem Punkte, der als Berührpunkt für zwei Punktenelemente zählt; gleichzeitig durchschneidet aber diese Gerade im Doppelpunkte den andern Curvenzweig in einem der Tangentialpunkte, so dass eine Doppelpunktstangente, wie es sein muss (4), drei Curvenpunkte vereinigt. Eine Doppelpunktstangente kann demnach nur noch in einem Punkte eines dritten Zweiges die Curve treffen, welcher der zweite oder sozusagen einzige eigentliche Tangentialpunkt ist.

In der That erhält man auf dem Grundkegelschnitt (Fig. 9) das Bild $\overline{T}$ des eigentlichen Tangentialpunktes T durch die Verbindungslinie des betreffenden der beiden Nachbarpunkte $\overline{A}\overline{A}'$ mit dem homologen Hauptpunkte. Ebenso für die zweite Doppelpunktstangente.

Ist ein Doppelpunkt isolirt, so sind selbstverständlich seine Tangenten imaginär, was daraus hervorgeht, als in solchem Falle die dem Doppelpunkte bildlich entsprechenden Nachbarpunkte $\overline{A}\overline{A}'$ auf dem Grundkegelschnitte selbst imaginär sind. Die Construction einer Doppelpunktstangente d ist somit höchst einfach, wenn man sie nach der Grundconstruction als den entsprechenden Strahl von demjenigen sucht, welcher die Verbindungslinie des dem Doppelpunkte O homologen Hauptpunktes $\overline{O}$ mit dem einen der gegenüberliegenden Nachbarpunkte $\overline{A}$ ist.

71. Man wird leicht nachweisen können, dass die sechs Hauptstrahlen $|\overline{O}\overline{A}|$ Tangenten eines Kegelschnitts sind, und weil diese Strahlen mit den Seiten des Dreiecks $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ die $\overline{A}$-Punkte gemeinsam haben, diese Punkte aber auf dem Grundkegelschnitt liegen, so werden auch die Doppelpunktstangenten d einerseits das Dreieck $O_1O_2O_3$ in sechs Punkten schneiden, welche auf einem Kegelschnitte liegen, andererseits aber einen Kegelschnitt berühren müssen. Wir folgern hieraus den Satz: „Die sechs Doppelpunktstangenten

einer Curve C_6^4 sind gleichzeitig Tangenten eines Kegelschnitts."

72. Jedem Doppelpunkte O einer Plancurve C_6^4 paaren sich zwei „Verzweigungselemente VV'" (54) reell oder imaginär. Sie werden immer reell sein, sobald die Involution, welche der homologe Hauptpunkt $\overline{O}$ auf dem Grundkegelschnitt hervorruft, hyperbolisch ist, indem ja die Doppelelemente der Involution nach (54) ihre Bilder $\overline{V}\overline{V}'$ sind. Wenn demnach der homologe Hauptpunkt des betreffenden Doppelpunktes im Systeme des Grundkegelschnittes innerhalb dieses letzteren liegt, so ist bekanntlich die durch ihn inducirte Involution 2ten Grades elliptisch und die Doppelelemente derselben sind imaginär, so dass die Verzweigungsstrahlen vv' sowie die ihnen perspectivisch zugeordneten Verzweigungspunkte VV' des betreffenden Curvendoppelpunktes selbst imaginär sein werden. Wir ersehen hieraus gleichzeitig, dass auch einem isolirten Doppelpunkte reelle Verzweigungselemente angehören können, was bei einem eigentlichen Doppel- oder Knotenpunkte nicht immer der Fall sein muss. Weil die Verzweigungsstrahlen des Grundkegelschnitts k Tangenten desselben sind, so muss offenbar diese Eigenschaft bei der quadratischen Transformation erhalten bleiben. Es lässt sich demzufolge der Satz geben: „Die sechs Verzweigungsstrahlen der drei Doppelpunkte einer Curve C_6^4 umhüllen einen Kegelschnitt."

Die Construction eines Verzweigungsstrahles v und seines Berührpunktes V der Curve für einen der drei Doppelpunkte O ist wieder sehr einfach, wenn man die Grundconstruction auf den ihm entsprechenden Hauptstrahl $\overline{v}$, welcher eine Tangente aus dem homologen Hauptpunkte $\overline{O}$ an den Grundkegelschnitt k mit dem Berührpunkte $\overline{V}$ ist, anwendet.

Ausser den beiden Verzweigungsstrahlen eines Doppelpunktes, gehen an die Curve C_6^4 keine weiteren Tangenten. Berücksichtigt man, dass jede der beiden Doppelpunktstangenten für zwei einfache Tangenten zu zählen ist, so erhalten wir mit den ersteren zusammen wieder die Classenzahl $= 6$ der Curve bestätigt.

73. Fallen die zwei Tangenten eines Doppelpunktes O_1 zusammen (Fig. 9), so bilden sie (6) eine Rückkehrtangente d_1 und der Doppelpunkt wird eine Spitze der Plancurve. Diese Spitzen- oder Rückkehrtangente ist nach (6) für drei Elemente zu zählen und bildet also mit den beiden aus dem Rückkehrpunkte an die Curve ziehenden Verzweigungsstrahlen fünf Tangentenelemente, so dass die Classenzahl $= 5$ degenerirt, was auch mit der Formel (8) stimmt, indem gemäss der Ordnung $= 4$, für zwei Doppelpunkte und einen Rückkehrpunkt erhalten wird: $4(4-1)-2\cdot 2 - 3\cdot 1 = 5$. Das Symbol dieser Plancurve ist demnach: C_5^4.

Weil sich in der Spitze der vorstehenden Curve C_5^4 drei Punktenelemente vereinigen, so kann die Spitzen-

tangente ebenfalls nur noch einen Tangentialpunkt T_1, sowie jede Doppelpunktstangente überhaupt, erhalten, welcher wieder auf jenem Curvenzweige gelegen sein muss, der nicht die betreffende Spitze unmittelbar, d. h. ohne vorher entweder eine Wendung in seinem Laufe oder einen unendlich fernen Punkt aufgenommen zu haben, durchsetzt.

Das Bild der Spitze (Fig. 9) ist auf dem Grundkegelschnitt jener Punkt $\bar{A}_1$, in welchem die entsprechende Seite $\bar{o}_1$ des Hauptdreiecks $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ diesen Kegelschnitt berührt, so dass also die beiden Nachbarpunkte $\bar{A}\bar{A}'$ als Bilder der Spitze in einem Coincidenzpunkt $\bar{A}_1$ zusammenfallen. Das Bild $\bar{T}_1$ des Tangentialpunktes T_1 der Spitzentangente d_1 erhält man jetzt einfach durch den Schnitt der Verbindungslinie jenes Berührungspunktes $\bar{A}_1$ mit dem conjugirten Hauptpunkte $\bar{O}_1$, auf dem Grundkegelschnitte k. Die Gerade, welche den T_1-Punkt mit dem betreffenden Rückkehrpunkte O_1 verbindet, ist die Spitzentangente d_1 als Bild des Hauptstrahles $|\bar{O}_1 \bar{A}_1|$.

74. Aus dem vor. Art. ersehen wir die Degeneration der Classenzahl einer ebenen Curve 4ter Ordnung um eine Einheit, sobald der Grundkegelschnitt von einer Seite des Hauptdreiecks $\bar{O}_1 \bar{O}_2 O_3$ berührt wird. Hieraus ergibt sich der Satz allgemein: „Die Classe einer Plancurve 4ter Ordnung mit drei Singularpunkten $O_1 O_2 O_3$ degenerirt um 0, 1, 2, 3 Einheiten, je nachdem 0, 1, 2, 3 Seiten des Haupt-

dreiecks $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ den Grundkegelschnitt tangiren, und die Singularpunkte verwandeln sich gleichzeitig in 0, 1, 2, 3 Spitzen." Es ergeben sich demzufolge für eine Curve 4ter Ordnung die vier möglichen Symbole: C_6^4, C_5^4, C_4^4, C_3^4.

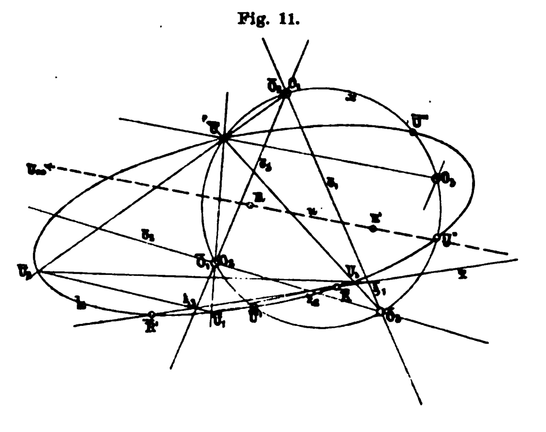
75. Aus dem bekannten Elementarsatze: „Bei jedem einem Kegelschnitte umschriebenen Dreiecke treffen die drei Geraden, welche die Ecken mit den Berührpunkten der gegenüberliegenden Seiten verbinden, in einem einzigen Punkte zusammen", schliessen wir auf den folgenden Satz:

„In einer ebenen Curve 4ter Ordnung mit drei Rückkehrpunkten schneiden sich die drei Spitzentangenten in einem Punkte."

Da die Classe einer solchen Curve auf die Zahl $= 3$ degenerirt, so wird sie mit den Symbole: C_3^4 bezeichnet.

76. Die nächste Frage richtet sich nach den Asymptotenelementen (3) einer Plancurve C_6^4 (Fig. 11). Der Hauptkreis $\varkappa$ ist das Bild der ∞ fernen Geraden der Ebene (41). Daraus ist zu entnehmen, dass die Plancurve soviele Asymp-

Fig. 11.



totenelemente besitzen wird, als der Grundkegelschnitt mit dem Hauptkreise $\varkappa$ gemeinschaftliche Schnittpunkte $\overline{U}$ besitzt. Da sich aber zwei Kegelschnitte bekanntlich in nicht mehr als vier Punkten verschneiden, so ist zu folgern, dass die Plancurve C_6^4 höchstens vier Asymptotenpunkte $U\infty$ und ebensoviele Asymptoten u besitzen kann.

Wir bemerken uns demnach für die Zukunft: Die Bilder der besagten Schnittpunkte $\overline{U}$ sind nach (58) jene Punkte $U\infty$, welche die Curve mit der ∞ fernen Geraden gemeinsam hat, und die Tangenten nach diesen Asymptotenpunkten sind die Asymptoten u der Plancurve.

77. Wenn der Grundkegelschnitt mit dem Hauptkreise keinen $\overline{U}$-Punkt gemeinsam hat, dann besitzt die Plancurve C_6^4 keine Asymptoten, sie ist eine im Endlichen geschlossene Curve und heisst: „Elliptische Curve". Schneiden sich Hauptkreis und Grundkegelschnitt, gleichgiltig in wievielen Punkten, dann heisst die Curve: „Hyperbolische Curve". Findet endlich zwischen dem Hauptkreise und dem Grundkegelschnitte eine Berührung statt, so kann diese bekanntlich auf nur dreierlei Weise geschehen: einfach, doppelt, dreipunktig (osculirend). In jedem Falle wird die ∞ ferne Gerade eine Asymptote der Plancurve und zwar im ersten Falle eine einfache; im zweiten Falle eine doppelte Tangente, so dass also die Curve die ∞ ferne Gerade in zwei Asymptotenpunkten berührt; im dritten

Falle berührt die ∞ ferne Gerade in einem dreipunktigen Elemente (Inflexion) die Curve und diese selbst heisst in den drei letzteren Specialfällen: „Parabolische Curve“.

78. Die Tangentialpunkte R einer Asymptote u, deren es im Allgemeinen, wie bei jeder einfachen Tangente, zwei geben wird, werden auf linearem Wege nach der in (69) gezeigten Construction ermittelt werden können. Darnach muss nämlich der betreffende $\overline{U}$-Punkt (Fig. 11), der zwischen dem Grundkegelschnitte k und dem Hauptkreise $\varkappa$ stattfindet, aus den Hauptpunkten $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ nach $\overline{U}_1\overline{U}_2\overline{U}_3$ auf den Grundkegelschnitt projicirt und in der dort angegebenen Weise das $\xi_1\xi_2\xi_3$-Tripel auf den Seiten $\overline{o}_1\overline{o}_2\overline{o}_3$ des Hauptdreiecks $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ bestimmt werden. Der Geradenträger $\overline{x}$ des $\xi_1\xi_2\xi_3$-Tripels trifft k in den Bildern $\overline{R}\overline{R'}$ der beiden gesuchten Tangentialpunkte RR' der Asymptote u.

79. Besitzt der Grundkegelschnitt selbst Asymptotenelemente (Hyperbel, Parabel), so bilden sich dieselben offenbar als diejenigen Punkte U der Plancurve C_6^4 ab, welche sie mit dem Hauptkreise $\varkappa$ gemeinschaftlich hat, was aus den bisherigen Erklärungen ohne Schwierigkeit gefolgert werden kann.

Diese U-Punkte erhält man nach der Grundconstruction in (58) gewiss am einfachsten, als jene

Hauptkreisschnitte, welche durch die zu den Asymptoten des Bildkegelschnitts k parallelen Strahlen des Perspectivitätscentrums $\bar{O}_3$ hervorgehen. Man sieht dabei gleichzeitig, dass es höchstens nur zwei U-Punkte geben kann, weil auch der Kegelschnitt k nicht mehr Asymptoten haben kann. Dieses Resultat stimmt aber ebenso mit dem Satze (10) überein, indem der Hauptkreis mit einer Curve 4[ter] Ordnung nicht mehr als acht Elemente gemein hat, von denen sechs durch die Doppelpunkte $O_1 O_2 O_3$ a priori vertreten sind. Dass das U-Punktenpaar imaginär sein wird, sobald der Grundkegelschnitt k eine Ellipse ist, und dass es endlich eine Coincidenz bilden wird, wenn k eine Parabel ist, versteht sich von selbst. In dem letzteren Falle berührt der Hauptkreis $\varkappa$ die C_6^4 einfach.

80. Ist speciell der Grundkegelschnitt ein Kreis k, so besitzt derselbe, wie bekannt, mit dem Hauptkreise $\varkappa$, ausser den vorkommendenfalls reellen Schnittpunkten, die imaginären Kreispunkte auf der ∞ fernen Geraden gemeinschaftlich, woraus wir schliessen, dass das Bild dieses Grundkreises k — die Plancurve — wegen der perspectivischen Beziehung der ∞ fernen Geraden (41), ebenfalls die ∞ weiten imaginären Kreispunkte als Elemente enthalten müsse.

Einige Ueberlegung lässt sofort den Schluss ziehen, dass den gesammten Kreisen der Ebene des Hauptdreiecks $\bar{O}_1 O_2 \bar{O}_3$, in dem Systeme des Hauptdreiecks $O_1 O_2 O_3$ Curven 4[ter] Ordnung entsprechen, welche alle,

ausser den Hauptpunkten $O_1 O_2 O_3$, noch die ∞ fernen imaginären Kreispunkte gemeinschaftlich haben (Curvennetz). Jedes derartige Curvenindividuum heisst: eine circulare Curve und man kann eine derartige Beziehung als „Kreisverwandtschaft" bezeichnen, von der späterhin ausführlicher die Rede sein wird.

§ 6. Die Doppeltangenten der Plancurve.

81. Wenn die beiden Tangentialpunkte einer einfachen Curventangente in Coincidenz gelangen, entsteht eine Doppeltangente $\varDelta$. Dieser Fall tritt in einer ebenen Curve 4ter Ordnung höchstens viermal ein. Die Erklärung hierzu ist in der Situation auf dem Grundkegelschnitt zu suchen. Das Bild einer Doppeltangente $\varDelta$ ist nämlich ein Kegelschnitt δ, der dem Hauptdreiecke $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ umschrieben ist und den Grundkegelschnitt doppelt berührt. Nachdem es nun für diese Aufgabe nur vier Lösungen giebt, so enthält die Curve auch nicht mehr Doppeltangenten. Selbstverständlich sind die Punkte $\bar{B}$, in denen der Grundkegelschnitt in einem der betreffenden, ihn doppelt berührenden Kegelschnitte δ berührt wird, die Bilder der Berührungspunkte B der bezüglichen Doppeltangente $\varDelta$ mit der Plancurve, und es gilt der Satz: „Die acht Berührungspunkte der vier Doppeltangenten einer ebenen C_6^4 liegen auf einem Kegelschnitte."

82. Jeder der in (81) bezeichneten doppelt berührenden Kegelschnitte δ ist überaus bestimmt, wenn

man seine Berührungssehne p im Grundkegelschnitte kennt, indem hierdurch sammt den drei Ecken $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ sieben Bestimmungsstücke angegeben sind. Die Ermittlung der vier Berührungssehnen p kann auf lineare Weise folgend geschehen. (Fig. 12.)

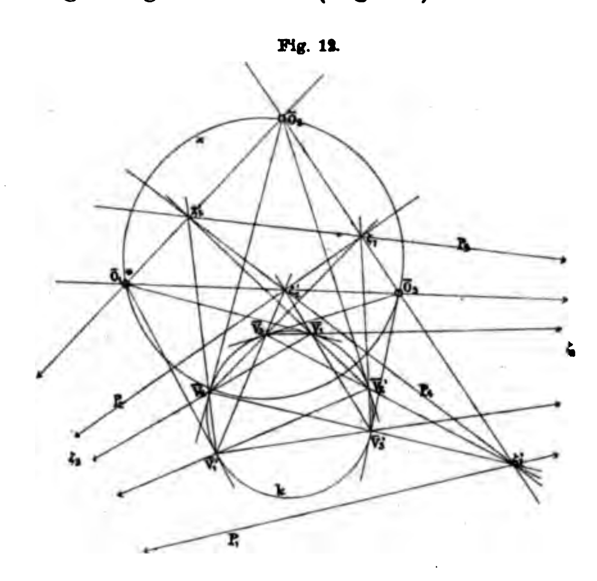


Fig. 12.

Die Polaren der Hauptpunkte $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ bezüglich des Grundkegelschnitts treffen diesen in Verzweigungselementen:

$$\overline{V}_1\overline{V}_1'; \quad \overline{V}_2\overline{V}_2'; \quad \overline{V}_3\overline{V}_3'.$$

Diese sechs Verzweigungspunkte bilden untereinander viererlei Projectivitäten, und jeder Projectivität entspricht einer der vier doppelt berührenden Kegelschnitte δ. Die Verbindungslinien entsprechender Elemente in jeder Projectivität schneiden sich jedesmal in einem Punkte ζ der Seiten des Hauptdreiecks, so dass jede dieser Seiten zwei

Punkte $\zeta\zeta'$ enthält, welche zu einander conjugirte Pole in Bezug des Grundkegelschnitts sind. Bezeichnet man diese conjugirten Polpaare $\zeta_1\zeta_1'$; $\zeta_2\zeta_2'$; $\zeta_3\zeta_3'$, so liegen sie auf den Dreiecksseiten $|\bar{O}_2\bar{O}_3| \equiv \bar{o}_1$; $|\bar{O}_1\bar{O}_3| \equiv \bar{o}_2$; $|\bar{O}_1\bar{O}_2| \equiv \bar{o}_3$ und ihre Construction zeigt das Schema:

$$(|\bar{V}_1\bar{V}_2|, \ |\bar{V}_1'\bar{V}_2'|) = \zeta_3; \quad (|\bar{V}_1\bar{V}_2'|, \ |\bar{V}_1'\bar{V}_2|) = \zeta_3'$$
$$(|\bar{V}_1\bar{V}_3|, \ |\bar{V}_1'\bar{V}_3'|) = \zeta_2; \quad (|\bar{V}_1\bar{V}_3'|, \ |\bar{V}_1'\bar{V}_3|) = \zeta_2'$$
$$(|\bar{V}_2\bar{V}_3|, \ |\bar{V}_2'\bar{V}_3'|) = \zeta_1; \quad (|\bar{V}_2\bar{V}_3'|, \ |\bar{V}_2'\bar{V}_3|) = \zeta_1'.$$

Die Punkte $\zeta\zeta'$ bilden die sechs Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen vier Verbindungslinien p die Punkte $\zeta\zeta'$ tripelweise enthalten:

$$|\zeta_3\zeta_2\zeta_1'| = p_1; \quad |\zeta_3\zeta_1\zeta_2'| = p_2; \quad |\zeta_2\zeta_1\zeta_3'| = p_3; \quad |\zeta_2'\zeta_3'\zeta_1'| = p_4.$$

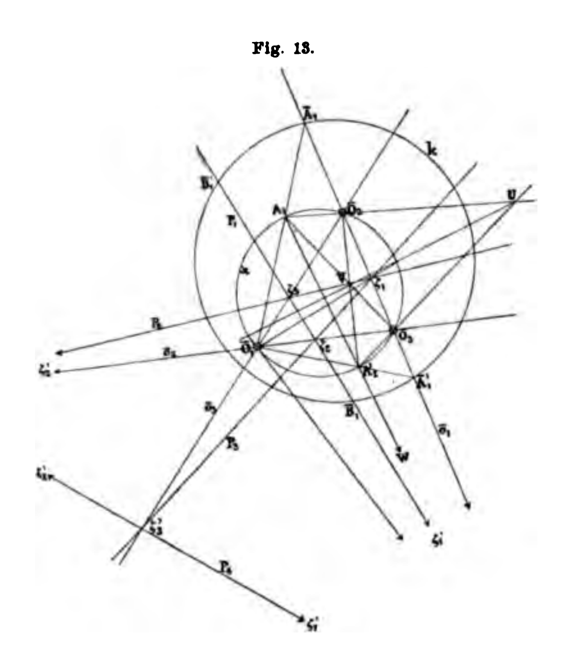
Fasst man die vier p-Geraden als vollständiges Vierseit auf, so ist dessen Diagonaldreiseit das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$. Ebenso polar-reciprok bilden die Pole der p-Sehnen bezüglich des Grundkegelschnitts ein Viereck, dessen Diagonaldreieck conjugirt dem Hauptdreiecke $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ ist.

Jede p-Sehne schneidet also (reell oder imaginär) auf dem Grundkegelschnitte die beiden Bilder $\bar{B}\bar{B}'$ der Berührungspunkte BB' einer (eigentlichen oder uneigentlichen) Doppeltangente $\varDelta$ der Plancurve C_6^4 aus. (In unserer Figur 12. kommen nur imaginäre $\bar{B}$-Bilder vor.)

83. Wenn die Verzweigungselemente in (82) imaginär sind, dann lässt sich die Construction in der angegebenen Form nicht ausführen. Wohl aber kann man die

conjugirten $\zeta\zeta'$-Pole auf den Seiten des Hauptdreiecks $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ auf anderem Wege erhalten. (Fig. 13.)

Fig. 13.



Auf jeder Seite des Hauptdreiecks $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ darf man die auf ihr liegenden Ecken desselben als Doppelelemente einer hyperbolischen Punkteninvolution ansehen. Ebenso sind dann die Schnittpunkte $\bar{A}\bar{A}'$, welche der Grundkegelschnitt k mit dieser Dreiecksseite erzeugt, Doppelelemente mit einer zweiten, mit der ersten conlocalen Involution, die nothwendig auch hypèrbolisch ist.

Sind nun diese beiden conlocalen Involutionsgebilde derart situirt, dass sich die Doppelelementenpaare umfassen oder von einander ganz getrennt erscheinen, so enthalten sie bekanntlich reelle gemein-

schaftliche Doppelelemente $\zeta\zeta'$; im andern Falle, wo die Paare durch einander getrennt werden, so dass ein Element zwischen die beiden andern conjugirten zu liegen kommt, sind die gemeinschaftlichen Doppelelemente $\zeta\zeta'$ imaginär.

Setzen wir den ersteren Fall voraus, so construiren sich die reellen $\zeta\zeta'$-Punkte auf folgende Art.

Schneidet beispielsweise die Dreiecksseite $|\bar{O}_2\bar{O}_3|$ den Grundkegelschnitt in dem Paare $\bar{A}_1\bar{A}_1'$ (Nachbarpunkte), so nehme man am einfachsten den Punkt $\bar{O}_1$ als Centrum einer concentrischen, mit den auf $|\bar{O}_2\bar{O}_3|$ conlocalen Involutionen perspectivischen Strahleninvolution an und projicire diese Punkte $\bar{A}_1\bar{A}_1'$ auf den Hauptkreis $\varkappa$ (als Constructionskreis) nach $A_I A_I'$. Jetzt suche man die Schnitte:

$$(|\bar{O}_2 A_I|, \ |O_3 A_I'|) = U; \quad (|\bar{O}_2 A_I'|, \ |\bar{O}_3 A_I|) = V.$$

Die Verbindungslinie $|UV|$ schneidet den Hauptkreis $\varkappa$ in zwei Punkten, welche aus $\bar{O}_1$ in die Gerade $|\bar{O}_2\bar{O}_3|$ projicirt, das gesuchte conjugirte Doppelelementenpaar $\zeta_1\zeta_1'$ geben.

Oder: Wir suchen direct den Schnitt:

$$(|A_I A_I'|, \ |\bar{O}_2\bar{O}_3|) = W,$$

ziehen aus W an den Hauptkreis das Tangentenpaar, so erhält man, indem die Berührungspunkte dieser Tangenten abermals aus $\bar{O}_1$ in die Gerade $|\bar{O}_2 O_3|$ projicirt werden, identisch das Punktenpaar $\zeta_1\zeta_1'$.

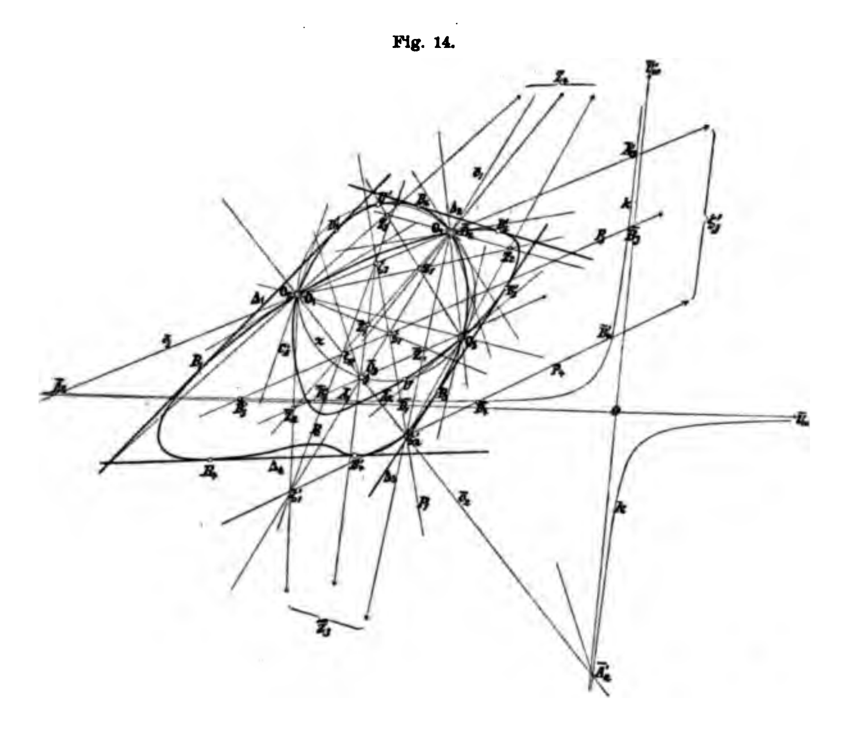
84. Die Realität der Doppeltangenten Δ einer ebenen Curve C_6^4 ist abhängig von der Lage des Grundkegelschnitts gegen das Hauptdreieck $O_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$. In dieser Beziehung wird es maassgebend sein, ob die $\zeta\zeta'$-Paare, welche nach (82) und (83) auf den Seiten des Hauptdreiecks erhalten werden, reell, theilweise oder ganz imaginär ausfallen, wodurch die gleiche Situation für die p-Sehnen der doppelt berührenden δ-Kegelschnitte und also auch die Realität der Doppeltangenten Δ auf der Plancurve bedingt wird.

Es muss jedoch wohl unterschieden werden, ob eine reelle Doppeltangente für die Plancurve eine eigentliche oder eine uneigentliche (ideelle) Tangente ist, d. h. ob die Berührung in reellen oder in imaginären Curvenpunkten B erfolgt. Diesfalls ist zu bemerken, dass der Fall einer eigentlichen Doppeltangente immer stattfindet, wenn die betreffende p-Sehne den Grundkegelschnitt in einem reellen Punktenpaare B schneidet, und dass eine p-Sehne mit imaginären Schnittpunkten eine ideelle Curventangente, also eine reelle Gerade mit imaginären Berührungselementen, abbildet. Man kann nun den Satz aussprechen:

„Die vier Doppeltangenten einer Plancurve 4ter Ordnung können sämmtlich eigentliche (Fig. 14), sämmtlich ideelle (Fig. 12) oder theilweise eigentliche und ideelle Tangenten (Fig. 13) sein; sie können aber auch insgesammt oder theilweise imaginäre Geraden vorstellen.“

85. Ist die Lage einer einzigen Doppeltangente im Curvensysteme bekannt, so kann man durch einfache Construction die drei übrigen Doppeltangenten linear fixiren. Wir werden hierzu durch folgende Betrachtung geführt. Wenn man (Fig. 14) die $\zeta\zeta'$-Pole mit dem jeweilig gegenüberliegenden Hauptpunkte des

Fig. 14.



Dreiecks $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ durch Strahlen verbindet, so treffen sich diese tripelweise in vier Punkten $\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3\bar{Z}_4$, die die Ecken eines vollständigen Vierecks bilden, in welchem das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ das Diagonaldreieck ist. Bildet man das Quadrupel $\bar{Z}_1\bar{Z}_2\bar{Z}_3\bar{Z}_4$ im Systeme Σ ab, so erhält man daselbst die analoge Beziehung, indem die vier Bildpunkte $Z_1Z_2Z_3Z_4$ wieder die Ecken

eines vollständigen Vierecks sind, dessen Diagonaldreieck jetzt das Doppelpunktsdreieck $O_1 O_2 O_3$ der Plancurve ist. Nunmehr gilt folgendes Constructionsgesetz: „Die Doppeltangenten Δ formen ein Vierseit, dessen Seiten von den Seiten des vollständigen Vierecks $Z_1 Z_2 Z_3 Z_4$ in solchen Punktenpaaren geschnitten werden, dass jedesmal die zwei Punkte eines Paares mit einem Doppelpunkt der Plancurve verbunden, ein Paar conjugirte Strahlen einer Harmonität bilden, deren anderes Elementenpaar die durch diesen Doppelpunkt ziehenden Seiten des Doppelpunktsdreiecks $O_1 O_2 O_3$ sind."

86. Sollen die vier Doppeltangenten Δ einer ebenen Curve 4[ter] Ordnung insgesammt reell und eigentliche Tangenten mit reellen Berührpunkten B sein, so ist dieser Fall nur dann möglich, wenn die drei Doppelpunkte der Curve selbst eigentliche Punkte (64) sind und der Grundkegelschnitt eine Hyperbel ist. (Fig. 14.)

Besitzt die Plancurve sogenannte Einsiedler (isolirte Punkte) (64), so können zwar alle vier Doppeltangenten reell vorhanden sein, es muss aber dann wenigstens eine davon eine ideelle sein.

Eine dreispitzige Plancurve C_3^4 enthält nur eine einzige reelle Doppeltangente und diese ist isolirt (ideell), d. h. ihre Berührpunkte sind imaginär. Identificirt sich die Doppeltangente mit der unendlich fernen Geraden der Ebene, so ist die Plancurve circular (80), was immer dann eintritt, wenn der Grundkegelschnitt ein Kreis ist und die Seiten seines Hauptdreiecks be-

rührt. Von Interesse ist der Fall, in welchem das Hauptdreieck $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ gleichseitig und der Grundkreis demselben eingeschrieben ist, weil dann die Plancurve C_3^4 in die bekannte Steiner'sche Hypocycloide übergeht. Dieses findet statt, wenn der Fall (46.a) eintritt, wobei sich die Punkte $O_3 \bar{O}_3$ identificiren werden.

§ 7. Die Inflexionselemente.

87. Zwischen den drei Punktenelementen, welche eine einfache Tangente einer ebenen Curve 4[ter] Ordnung aufweist, kann der singuläre Fall stattfinden, dass einer der beiden begleitenden Tangentialpunkte mit dem Berührpunkte in Coincidenz tritt, wodurch auf der Curve eine Inflexion (7) entsteht und diese Tangente i sowie ihr Berührungspunkt J Inflexionselemente werden.

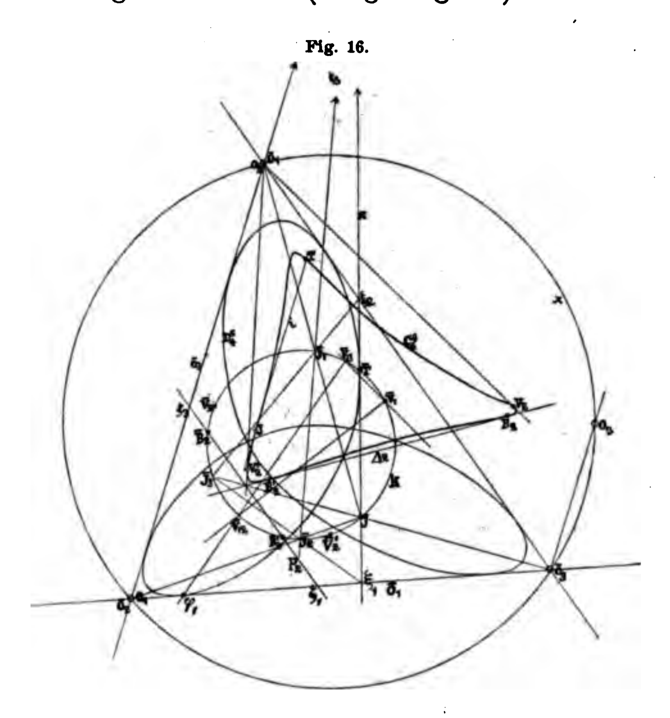
Das Wesen einer Curveninflexion drückt sich bekanntlich darin aus, dass die Curve daselbst eine Wendung in ihrem Verlaufe begeht, indem ihr Zug in entgegengesetzten Richtungen von dem J-Punkte, auch auf entgegengesetzten Seiten der i-Tangente verläuft.

Insofern die Plancurve C_6^4 auf einem Grundkegelschnitt abgebildet wird, ist das Bild einer Inflexionstangente ein dem Hauptdreiecke $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ umschriebener Kegelschnitt ι, welcher den Grundkegelschnitt in dem Bilde $\bar{J}$ des dreielementigen Berührungspunktes J dieser i-Tangente osculirt.

Dieser osculirende Kegelschnitt berührt somit, wie bekannt, den Kegelschnitt k in dem bezeichneten Punkte

und schneidet ihn daselbst gleichzeitig; er schneidet ihn aber noch ein zweitesmal und dieser zweite Schnitt $\overline{T}$ ist offenbar das Bild des einzigen Tangentialpunktes T, welchen die Inflexionstangente i mit der Plancurve gemein hat. (Vergl. Fig. 16.)

Fig. 16.



88. „Es giebt sechs Kegelschnitte ι, welche den Grundkegelschnitt osculiren und dem Hauptdreiecke $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ umschrieben sind.“ Hieraus folgt, dass eine ebene Plancurve 4ter Ordnung höchstens sechs Inflexionen besitzen kann. Die Bestätigung dessen zeigt sich auch nach der Formel in (7), in welcher $n = 4$, $d = 3$ und $r = o$ zu setzen ist:

$$i = 3 \cdot 4\,(4 - 2) - 6 \cdot 3 = 6.$$

Die Ermittlung der Inflexionselemente einer Plancurve 4ter Ordnung kann erst später gezeigt werden.

Zweiter Abschnitt.

Die Involutionen auf einer Plancurve vierter Ordnung.

§ 8. Quadratische Involutionen.

89. Die Strahlen, welche durch einen Doppelpunkt einer Curve 4ter Ordnung gezogen werden, schneiden auf ihr Punktenpaare einer centralen quadratischen Involution aus. Wir sehen, dass drei solche Involutionen an und für sich mit der Curve gegeben sind, weshalb sie die centralen quadratischen Fundamentalinvolutionen genannt werden. Die Verzweigungselemente des als Centrum angenommenen Doppelpunktes sind offenbar die Doppelelemente der Involution (72).

Die zwei übrigen Doppelpunkte der Curve bilden ebenfalls jeder ein Elementenpaar dieser Involution; ebenso wird einzusehen sein, dass jeder der beiden Nachbarpunkte des Centrums mit seinem Tangentialpunkte (der Doppelpunktstangente) je ein Paar der Involution vorstellen, was sich am einfachsten am Grundkegelschnitte studiren lässt. Daselbst erkennt man auch sofort, dass die Bilder des Doppelelementenpaares der Involution auf der Curve nichts anderes sind, als die Verzweigungselemente der quadratischen

Involution am Grundkegelschnitte, deren Centrum der dem Curvendoppelpunkte homologe Hauptpunkt des Dreiecks $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ ist (54).

Man kann auch umgekehrt aussprechen: „Jeder quadratischen Involution, welche durch einen der Hauptpunkte $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ auf dem Grundkegelschnitte hervorgerufen worden, entspricht in der Plancurve eine centrale quadratische Fundamentalinvolution des homologen Doppelpunktes.“ Die Hauptstrahlen des betreffenden Hauptpunktes schneiden auf dem Grundkegelschnitte Paare von Punkten aus, deren Bilder in der Curve gleicherweise Paare der Fundamentalinvolution sind.

90. Eine andere Art quadratischer Involutionen auf dem Grundkegelschnitt wird durch die Pole $\overline{\Omega}$ der Seiten des Hauptdreiecks $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ hervorgerufen. Da diese Involutionen ebenfalls von selbst gegeben sind, so werden ihre Abbildungen auf der Plancurve auch wieder als „Fundamentalinvolutionen“ zu bezeichnen sein. Diese Art Involutionen auf der Plancurve C_6^4 unterscheidet sich wesentlich von jener in (89) dadurch, dass sie nicht mehr „central“ ist, also kein gemeinsames Centrum besitzt, weshalb sie „allgemeine (nicht centrale) quadratische Fundamentalinvolutionen“ genannt werden.

Ist $\overline{\Omega}_1$ der Pol der Dreiecksseite $|\overline{O}_2 \overline{O}_3| \equiv \overline{o}_1$ bezüglich des Grundkegelschnitts, so sind $\overline{A}_1 \overline{A}_1'$ die Doppelpunkte der durch $\overline{\Omega}_1$ hervorgerufenen qua-

dratischen Involution, und da diese nichts anderes sind, als die Bilder der Nachbarpunkte des homologen Doppelpunktes O_1 der Plancurve C_6^4, so ersieht man, dass diese allgemeine quadratische Fundamentalinvolution die Nachbarpunkte als in dem Doppelpunkt O_1 zusammenfallende Doppelelemente besitzt.

Jedem Strahle der Involution in $\overline{\Omega}_1$ als Punktenträger entspricht bildlich im Curvensysteme ein Kegelschnitt, welcher dem Dreiecke $O_1 O_2 O_3$ umschrieben ist und der zugleich durch das Bild Ω_1 von $\overline{\Omega}_1$ zieht. Den gesammten Strahlen der Involution $\overline{\Omega}_1$ entspricht demnach ein Kegelschnittsbüschel mit den Grundpunkten $O_1 O_2 O_3 \Omega_1$. Jedes Individuum dieses Büschels schneidet auf der Plancurve ein Punktenpaar der allgemeinen Involution aus, dessen Elemente die Bilder jener Schnittpunkte sind, die der betreffende Bildstrahl der centralen Involution $\overline{\Omega}_1$ auf dem Grundkegelschnitt hervorbringt.

Den Doppelstrahlen der Involution $\overline{\Omega}_1$, welche den Grundkegelschnitt in den beiden Bildern $\overline{A}_1 \overline{A}_1'$ der Nachbarpunkte des Doppelpunktes O_1 tangiren, entsprechen in dem Kegelschnittsbüschel $O_1 O_2 O_3 \Omega_1$ zwei Kegelschnitte, die in O_1 drei Punkte vereinigen, woraus wir folgern, dass jeder die Plancurve dortselbst osculirt.

91. Ein Kegelschnittsbüschel, das die Doppelpunkte $O_1 O_2 O_3$ und einen beliebigen vierten Punkt M der Ebene einer Curve 4ter Ordnung zu Grundpunkten

hat, schneidet auf dieser Curve eine allgemeine quadratische Punkteninvolution aus, deren conjugirte Paare auf je einem der Individuen des Büschels sich befinden. Das Bild dieses Büschels ist immer eine „centrale quadratische Strahleninvolution“ in Bezug des Grundkegelschnitts, deren Centrum $\overline{M}$ das Bild des Grundpunktes M ist. Diese Strahleninvolution $\overline{M}$ erzeugt perspectivisch eine quadratische Punkteninvolution des Grundkegelschnitts und die Paare conjugirter Elemente der letzteren, also auch deren Doppelelemente, sind Bilder der allgemeinen quadratischen Involution auf der Plancurve. In den beiden Doppelpunkten der Curveninvolution wird die Curve C_6^4 von je einem Individuum des Kegelschnittsbüschels $O_1 O_2 O_3 M_1$ einfach berührt, wie leicht zu erkennen ist.

§ 9. Cubische Involutionen.

92. Nimmt man auf einer Plancurve C_6^4 einen beliebigen Punkt M als den Mittelpunkt eines Strahlenbüschels an, so schneidet jeder Strahl des Büschels die Curve in einem Tripel von Punkten. Die gesammten Punktentripel bilden auf der Curve eine centrale cubische Involution.

Denkt man sich die gesammten Punktentripel der Involution auf dem Grundkegelschnitte k abgebildet, so entspricht jedem Tripel ein diesem Kegelschnitte eingeschriebenes Dreieck, dessen Ecken die Bilder des Tripels sind. Diese Punktentripel des Grundkegelschnitts bilden auf ihm ebenfalls wieder eine cubische

Involution. Eine solche kann auf einem Kegelschnitte selbstverständlich niemals eine centrale sein.

Die Seiten aller dem Grundkegelschnitt auf diese Art eingeschriebenen Dreiecke umhüllen einen Kegelschnitt, welcher der „Involutionskegelschnitt“ genannt wird.

Die gemeinschaftlichen Tangentenelemente dieser beiden Kegelschnitte erzeugen in ihren Berührungspunkten auf dem Grundkegelschnitt die Doppelelemente der cubischen Involution und, da zwei Kegelschnitte vier gemeinschaftliche Tangenten besitzen, so folgt, dass die Involution vier Doppelelemente enthält, welche paarweise auch imaginär sein können. Die Bilder dieser Doppelelemente sind natürlich ebenfalls wieder die Doppelpunkte der centralen cubischen Involution auf der Plancurve und sie bilden daselbst die Berührpunkte der vier möglichen aus dem Centrum M an die Curve ziehenden Tangenten.

93. Beachtet man, dass in dem Büschel M auf der Curve auch jene Strahlen vorkommen, welche die Doppelpunkte $O_1 O_2 O_3$ enthalten, so ist einzusehen, dass zu dem Systeme der dem Grundkegelschnitte eingeschriebenen Dreiecke nicht nur diejenigen zählen, deren jedes durch die Schnittpunkte $\bar{A}\bar{A}'$ (Nachbarpunkte) und die aus $\bar{M}$ erfolgende Projection des homologen Hauptpunktes auf den Grundkegelschnitt gebildet wird, sondern dass auch insbesondere das

Hauptdreieck $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ selbst ein solches ist, welchem der Involutionskegelschnitt eingeschrieben erscheint.

94. In denjenigen Punkten, welche die beiden betrachteten Kegelschnitte (Grund- und Involutionskegelschnitt) gemeinschaftlich haben, zieht je eine Tangente an den Involutionskegelschnitt, welche als ein singuläres Element der dem Grundkegelschnitt eingeschriebenen Dreiecke aufzufassen ist, insofern die betreffende Tangente zwei zusammenfallende Seiten eines solchen Dreiecks vorstellt, dessen dritte Seite offenbar eine der gemeinschaftlichen Tangenten beider Curven ist. Hieraus muss der Schluss gezogen werden, dass ein gemeinsamer Schnittpunkt der beiden Kegelschnitte nichts anderes ist, als das Bild des Tangentialpunktes, welcher die betreffende Tangente (als Doppelelement der cubischen Involution) aus M auf der Plancurve begleitet.

95. Die Erzeugung der Punktentripel auf dem Grundkegelschnitt kann auch auf anderem Wege vorgenommen werden. Denkt man sich die centrale cubische Involution des Curvenpunktes M auf dem Grundkegelschnitt abgebildet, so entspricht jedem Strahle derselben ein Kegelschnitt, der dem Hauptdreiecke $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ umschrieben ist und das Bild $\overline{M}$ enthält, also ein Kegelschnittsbüschel mit den Grundpunkten $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3\overline{M}$. Jedes Individuum dieses Büschels schneidet den Grundkegelschnitt, ausser in dem Grund-

punkte $\overline{M}$, noch in einem Tripel der auf dem Grundkegelschnitt erzeugten cubischen Involution. Ein solches Punktentripel kann immerhin auf linearem Wege construirt werden, indem die Aufgabe auf eine bekannte Kegelschnittsconstruction hinausläuft.

96. Aus dem Vorstehenden wird man bemerken, dass in einer ebenen Curve vierter Ordnung jedem ihrer Punkte eine centrale cubische Involution zugeordnet ist. Ausser diesen gibt es auch allgemeine Involutionen 3ten Grades, auf welche jedoch hier nicht eingegangen werden soll. Würde insbesondere der Curvenpunkt M in einen der Doppelpunkte $O_1 O_2 O_3$ fallen, so müsste jedenfalls eine Degeneration der cubischen Involution erfolgen, was aus der Eigenthümlichkeit eines Doppelpunktes, als der Vereinigung von zwei Punktenelementen der Curve, von selbst einleuchtet. In der That erhalten wir in solchem Falle eine der in (89) bezeichneten quadratischen Fundamentalinvolutionen, deren Doppelelemente durch die Verzweigungstangenten des betreffenden Doppelpunktes der Curve ausgedrückt erscheinen.

§ 10. Biquadratische Involutionen.

97. Eine c e n t r a l e biquadratische Involution entsteht auf einer Plancurve 4ter Ordnung, wenn man in der Ebene einen Punkt M beliebig annimmt. Die sämmtlichen Strahlen des Punktes M treffen die Plancurve in Quadrupeln einer biquadratischen Involution.

Entsprechend der Classenzahl der Curve C_6^4 enthält die Involution sechs Doppelelemente. Jede Gruppe von vier Elementen der Involution ist das Bild der Schnittpunkte eines Kegelschnitts, der als Individuum eines Kegelschnittsbüschels mit den Grundpunkten $\overline{O}_1\,\overline{O}_2\,\overline{O}_3\,\overline{M}$ anzusehen ist, welcher den Grundkegelschnitt in dem Bilde des Punktenquadrupels schneidet.

Werden die Punktenelemente in jedem Quadrupel auf dem Grundkegelschnitt untereinander durch Gerade verbunden, so umhüllen diese Geraden eine Curve 3ter Classe: die Involutionscurve. Diese Curve besitzt mit dem Grundkegelschnitt $3 \cdot 2 = 6$ gemeinschaftliche Tangenten, deren Berührungspunkte am Kegelschnitt die sechs Doppelelemente der biquadratischen Involution auf der Plancurve C_6^4 abbilden; somit sind die Verbindungslinien dieser Doppelpunkte der centralen Involution mit dem Centrum M die sechs an die Plancurve ziehenden Tangenten aus M.

Jede der aus M an die Plancurve gezogenen Tangenten enthält ausser ihrem Berührpunkte noch zwei Tangentialpunkte. Der Berührpunkt (als Doppelelement) bildet mit diesen beiden Tangentialpunkten eine Elementengruppe, in welcher die Tangentialpunkte die Verzweigungselemente heissen und die Gruppe selbst: Verzweigungsgruppe genannt wird, deren es also, vermöge der Classe der Curve C_6^4, sechs geben wird.

Anmerkung. Unter Umständen kann es vorkommen, dass eine centrale biquadratische Involution, deren Träger eine Curve 4ter Ordnung ist, in zwei ebenfalls centrale quadratische, einander begleitende In-

volutionen zerfällt. Dieser Fall erfordert der Natur der Sache nach ein den beiden Theilinvolutionen gemeinschaftliches Centrum, welches nur der Schnittpunkt zweier Doppeltangenten der zugrundeliegenden Plancurve sein kann. Denkt man sich nämlich aus einem der genannten Schnittpunkte einen beliebigen Strahl gezogen, so wird er die C_6^4 in vier Punktenelementen treffen, die sich nun so paaren lassen, dass dadurch zwei einander begleitende quadratische Punkteninvolutionen von gemeinschaftlichem Centrum entstehen. Beide Involutionsgebilde müssen dann ein gemeinschaftliches Doppelelementenpaar — die Berührpunkte der betreffenden zwei Doppeltangenten der Curve — besitzen. Wie man sieht, kann dieser Fall bei den vier Doppeltangenten einer C_6^4 sechsmal eintreten. Bei der transformatorischen Abbildung auf einen Kegelschnitt werden die beiden Theilinvolutionen ebenfalls ein gemeinschaftliches Centrum — das Bild des Curvencentrums — haben müssen und die Verbindungslinien der conjugirten Elemente in der einen Punkteninvolution werden mit denjenigen in der sie begleitenden Punkteninvolution des Bildkegelschnitts je ein Paar conjugirte Elemente einer einzigen Strahleninvolution 2ten Grades ausmachen, deren Doppelstrahlen auf dem Kegelschnitte die Berührpunkte der betreffenden zwei Doppeltangenten der Curve abbilden.

98. Eine allgemeine biquadratische Involution, deren Punktenquadrupel also nicht auf geraden Trägern liegen, kann durch ein Kegelschnittsbüschel, von welchem das eine Paar Grundpunkte beliebig in der Ebene, das andere aber zwei Doppelpunkte der Plancurve C_6^4 sind, aus dieser geschnitten werden. Nachdem in diesen zwei Doppelpunkten vier Schnittelemente absorbirt werden, so wird jedes Individuum des Büschels, weil es mit der Plancurve $2 \cdot 4 = 8$ Elemente gemein hat, auf dieser letzteren ein Punktenquadrupel einer derartigen Involution hervorbringen.

Bilden wir die Plancurve auf dem Grundkegelschnitt ab, so bildet sich das angenommene Kegelschnittsbüschel ebenfalls wieder als solches ab, dessen Grundpunkte offenbar die homologen Hauptpunkte der obigen

einerseits und andererseits die Bilder der beiden übrigen, beliebig gewählten Grundpunkte sein werden.

Jedes Individuum des abgebildeten Kegelschnittsbüschels schneidet auf dem Grundkegelschnitte das Bild einer Quadrupelgruppe der biquadratischen Involution aus. Von jedem Elemente eines Quadrupels ziehen $(4-1)=3$ Verbindungslinien nach den restlichen der Gruppe und die gesammten Verbindungslinien hüllen als Tangenten die Involutionscurve 3ter Classe ein. Nach (25) ist die Ordnung $(4-1)(4-2)=6$, somit das Symbol der Involutionscurve: J_3^6. Ebenso erhalten wir darnach: $2(n-1)=6$ Doppelpunkte als die Berührungspunkte der zwischen der Involutionscurve und dem Grundkegelschnitt gemeinschaftlichen Tangenten auf dem letztern und weiter $2(4-1)(4-2)=12$ Verzweigungspunkte als Schnitte dieser beiden Curven. Die 12 Verzweigungspunkte paaren sich mit je einem Doppelpunkte wieder zu einer Verzweigungsgruppe.

Welche Beziehungen treten ein, wenn die Plancurve C_6^4 das Bild eines Kreises darstellt und das in zwei Doppelpunkten dieser Curve angenommene Kegelschnittsbüschel als zweites Paar Grundpunkte die ∞ fernen imaginären Kreispunkte (Kreisbüschel mit eigentlicher Potenzlinie) enthält?

Dritter Abschnitt.

Symmetrische Elementensysteme auf C_6^4.

§ 11. Das System 2ten Grades.

99. Nimmt man auf einer ebenen Curve 4ter Ordnung eine allgemeine quadratische Involution wie in (91) an, so liegt jedes Paar conjugirter Elemente auf einer Geraden. Eine solche Gerade trifft die Plancurve noch in einem zweiten Punktenpaare (vermöge der Ordnung der Curve), welches das involutorische Punktenpaar auf ihr „begleitet". Die gesammten begleitenden Punktenpaare aller Involutionspaare sind ein die quadratische Involution begleitendes symmetrisches Elementensystem 2ten Grades.

Auf dem Grundkegelschnitte stellt sich die Abbildung folgend dar. Nach (91) ist das Bild der allgemeinen Involution eine centrale für den Kegelschnitt, deren Centrum das Bild $\overline{M}$ des ausser $O_1 O_2 O_3$ noch vierten Grundpunktes M ist. Jede Gerade g, welche ein Paar conjugirte Elemente XX' der Involution auf der Curve sowie das begleitende Paar YY' des Systems trägt, bildet sich auf dem Grundkegelschnitt als ein Kegelschnitt γ ab, der dem Dreieck $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ umschrieben ist und den Grundkegelschnitt in den Bildern $\overline{X}\overline{X}'$, $\overline{Y}\overline{Y}'$ jener beiden Elementenpaare schneidet. Das Involutionspaar $\overline{X}\overline{X}'$ ist nun der Voraussetzung gemäss als gegeben anzusehen und es handelt sich also nur um die Bestimmung des Punktenpaares $\overline{Y}\overline{Y}'$. Diese folgt nach der Construction in (61).

Die gesammten $\overline{Y}\overline{Y}'$-Paare bilden nun ebenfalls auf dem Grundkegelschnitte ein symmetrisches Punktensystem 2ten Grades. Die Verbindungslinien der Elemente in jedem Paare umhüllen den „Directionskegelschnitt" (28) des symmetrischen Systems.

Wie man sich leicht überzeugen kann, sind die Seiten des Hauptdreiecks $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ ebenfalls Tangenten des Directionskegelschnitts der allgemeinen quadratischen Involution, er ist also diesem Dreiecke einbeschrieben. Der Directionskegelschnitt hat mit dem Grundkegelschnitte vier gemeinschaftliche Tangenten und vier gemeinschaftliche Punkte. Die Berührungspunkte dieser Tangenten geben auf dem Grundkegelschnitt die Bilder der Doppelpunkte erster Art und die gemeinschaftlichen Punkte die Bilder der Verzweigungspunkte der Doppelpunkte zweiter Art (28) des symmetrischen Systems 2ten Grades auf der Plancurve C_6^4 an. Die Doppelpunkte erster Art zeigen uns eine Coincidenz eines YY'-Paares auf der Plancurve C_6^4, d. h. es wird sich viermal ereignen, dass die Verbindungslinie g eines XX'-Paares eine Tangente an die Curve ist. Die Doppelpunkte der zweiten Art zeigen eine Coincidenz zwischen je einem Elemente der sich begleitenden Paare XX', YY', so dass also der betreffende g-Träger ebenfalls viermal in diesem Sinne zur Tangente wird.

100. Das Vorkommen des in der Anmerkung des Art. (97) definirten Falls kann man auch aus einer

allgemeinen quadratischen Involution in folgender Weise ableiten. Denken wir uns in einer C_6^4 ein Kegelschnittsbüschel mit den Doppelpunkten der Curve und einem sonst beliebigen Punkt der Ebene als Grundpunkte $O_1 O_2 O_3 M$, so wissen wir aus (91), dass jedes Kegelschnittsindividuum die Curve in einem Paare conjugirter XX'-Elemente einer allgemeinen quadratischen Involution trifft, und dass nach (99) diese Involution von dem symmetrischen Systeme 2[ten] Grades der YY'-Elemente begleitet wird. Tritt nun der Fall ein — was immerhin denkbar ist — dass das YY'-System in eine Involution übergeht, indem sich die gesammten $|YY'|$-Verbindungslinien in einem ausser der Curve C_6^4 liegenden Punkte N schneiden, die YY'-Involution also central ist, so ist dieses nur dann möglich, wenn gleichzeitig die XX'-Involution dieselbe Eigenschaft zeigt und beide einander begleitenden Involutionen im N-Punkte concentrisch sind. Dieser Specialfall einer so zerfallenden biquadratischen Involution trifft für jeden Schnittpunkt N zweier Doppeltangenten einer C_6^4 ein, worauf schon in der oben angezogenen Anmerkung (97) hingewiesen worden ist.

Von den in (97) bemerkten sechs Verzweigungsgruppen verbleiben jetzt nur mehr zwei eigentliche, weil sich die restlichen vier in den zwei aus N ziehenden Doppeltangenten vereinigen.

Studirt man die Sache in einer quadratischen Transformation auf einem Grundkegelschnitte k, so sind die zwei concentrischen Involutionen $N(XX', YY')$

dort auch wieder concentrisch in einem der in (82) angegebenen $\zeta\zeta'$-Punkte, so dass die Verbindungslinien $|\overline{X}\overline{X}'|$, $|\overline{Y}\overline{Y}'|$ conjugirte Elemente einer Strahleninvolution mit dem bezüglichen ζ-Centrum bilden, in welcher die in (82) bezeichneten zwei durch ζ laufenden p-Geraden die Doppelstrahlen sind, deren Sehnenendpunkte $\overline{B}$ auf dem Grundkegelschnitt die Berührpunkte B einer Curvendoppeltangente $\varDelta$ abbilden.

Da der betrachtete ζ-Punkt gleichzeitig das Centrum einer Involution bezüglich des Grundkegelschnitts k ist, so werden die zwei Doppelelemente dieser Involution, resp. deren Berührpunkte, uns jene zwei einzigen Verzweigungsgruppen hervorrufen, von denen vorhin die Rede war, und man wird also aus dem betrachteten N-Punkte der zwei Doppeltangenten $\varDelta$ nur noch zwei einfache Tangenten an die C_6^4 ziehen können, wie die Classe der letztern verlangt.

§ 12. System der Tangentialpunkte.

101. Eine ausgezeichnete Rolle nimmt auf einer ebenen Curve 4ter Ordnung das System der Tangentialpunkte ein, weil es uns zur Ermittlung der (87) „Inflexionselemente der Curve" führt.

Jede Curventangente enthält ihren Berührpunkt und das Paar ihrer Tangentialpunkte. Die Tangentialpunkte einer Tangente begleiten also den zugehörigen Berührpunkt, wodurch die Plancurve C_6^4 a priori zum Träger von zwei Punktensystemen wird, die, wie

die folgenden Untersuchungen zeigen werden, zwei-vierdeutig sind.

Der Grundkegelschnitt, als Abbildung der Plancurve C_6^4, wird wieder der Ort sein, wo wir den gegenseitigen Beziehungen nachzugehen haben. Wenn die beiden zwei-vierdeutigen Punktensysteme auf dem Grundkegelschnitte abgebildet werden sollen, so ist zu erinnern, dass sich (68) jede Tangente der Plancurve als ein Kegelschnitt, welcher das Hauptdreieck $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ umzieht, transformirt, der den Grundkegelschnitt in dem Bilde $\overline{X}$ des Tangirungspunktes X einfach berührt und in den Bildern $\overline{X}' \overline{X}''$ der beiden Tangentialpunkte $X' X''$ durchschneidet. Wir werden also mit Hülfe der Construction in (69) imstande sein, in jedem Falle das einen $\overline{X}$-Punkt begleitende $\overline{X}' \overline{X}''$-Paar zu ermitteln.

102. Einem beliebigen Curvenpunkte X, sofern man ihn als Berührpunkt der in ihm laufenden Tangente der Curve C_6^4 ansieht, entsprechen immer zwei Tangentialpunkte dieser Tangente; in dieser Anschauung stellen also die gesammten X-Punkte das zweideutige System vor. Wird aber ein X-Punkt als Tangentialpunkt angesehen, so wissen wir aus (92), dass sich ausser der in ihm gehenden Tangente (welche für zwei Elemente zu zählen ist) noch vier Curventangenten ziehen lassen, wie es der Classe von C_6^4 entspricht. Nach dem letzteren Ergebnisse muss somit das System der einzelnen Curvenpunkte als vierdeutig bezeichnet

werden, so dass also die im vor. Art. aufgestellte Behauptung: „Die Curve C_6^4 ist der Träger von zwei Punktensystemen, die in zwei-vierdeutiger Beziehung stehen“ nachgewiesen erscheint.

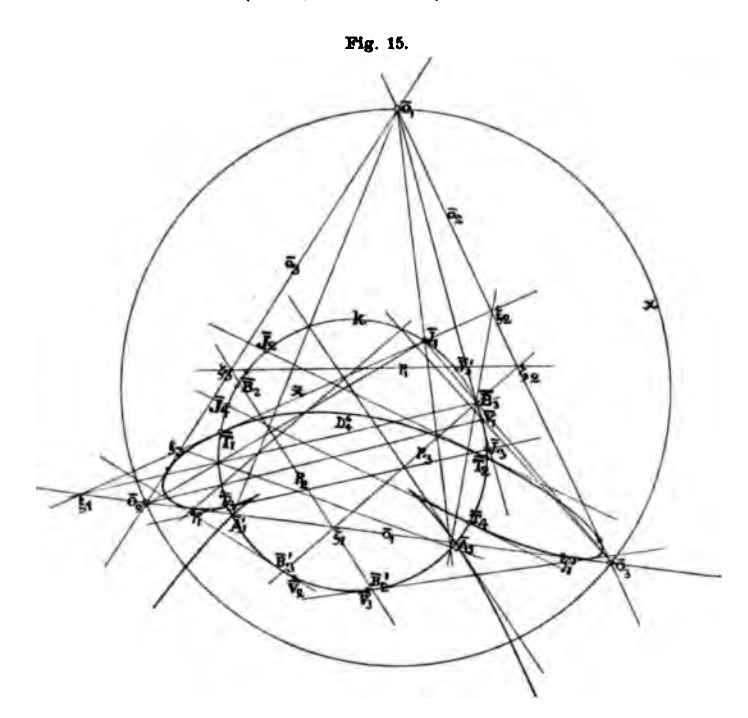
Die $\overline{X}$-Punkte bilden auf dem Grundkegelschnitte ein zweideutiges System, während die $\overline{X}'\overline{X}''$-Paare ein auf ihm mit dem ersteren conlocales vierdeutiges Punktensystem herstellen. Das vierdeutige System der Tangentialpunkte $X'X''$ (abgebildet) ist ein symmetrisches System 4ten Grades, und weil dasselbe von selbst gegeben angesehen werden muss, so wollen wir es als das absolute System der Tangentialpunkte der Plancurve C_6^4 bezeichnen.

103. Die Verbindungslinien der $\overline{X}'\overline{X}''$-Paare geben als Enveloppe die Directionscurve des absoluten Systems, welche, weil das System vom 4ten Grade ist, nach (28) eine Curve 4ter Classe sein muss. Sofern diese Curve eine allgemeine wäre, sollte ihre Ordnungszahl: $4(4-1)=12$ sein. Wir werden jedoch sehen, dass das nicht der Fall ist, indem die Curve, deren Symbol bis jetzt: D_4^{12} ist, Singularitäten enthält, welche nach (9) stets eine Degeneration von Ordnung oder Classe der betreffenden Curve bedingen.

104. Vor allem muss man sich über das Wesen der die Directionscurve als Tangenten einhüllenden Geraden $\overline{x}$ (69) klar werden. Diese $\overline{x}$-Geraden sind für den Grundkegelschnitt Sekanten, weshalb wir kurz-

weg deren Gesammtheit als „Sekantensystem“ benennen wollen. (Vergl. Fig. 15.)

Fig. 15.



Die Elemente des $\bar{x}$-Sekantensystems können eigentliche und uneigentliche Sekanten in Bezug des Grundkegelschnitts sein, mit andern Worten: die $\overline{X}'\overline{X}''$-Paare sind reell oder imaginär. Offenbar wird dieses eigentliche-uneigentliche System durch jene Elemente geschieden, in welchen eine Coincidenz des Paares $\overline{X}'\overline{X}''$ eintritt, wo die Sekantenelemente zu Tangenten werden. Nun ist es einleuchtend, dass dieser letztere Fall stattfindet, wenn auf der Plancurve die Tangente zur Doppeltangente wird. Den Berührungspunkten einer Doppeltangente entsprechen aber auf dem Grund-

kegelschnitte die Endpunkte der p-Sehnen (82), in welchen die doppelt berührenden Kegelschnitte ziehen. Wir schliessen demzufolge: „Jedem Endpunkte $\overline{B}$ einer p-Sehne entspricht im Sekantensysteme die Tangente im andern Endpunkte $\overline{B}'$ dieser Sehne.“ Diese Eigenschaft ist, wie man sieht, involutorisch.

105. Beachtet man, dass ein Verzweigungsstrahl eines Doppelpunktes der Plancurve C_6^4 eine Curventangente vorstellt, bei welcher die beiden Tangentialpunkte sich in diesem Doppelpunkte vereinigen, das Bild des Doppelpunktes aber die Nachbarpunkte $\overline{A}\overline{A}'$ auf der entsprechenden Seite des Hauptdreiecks $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ sind, so sieht man ohne Schwierigkeit ein, dass einem Verzweigungspunkte eines Hauptpunktes des Grundkegelschnitts im Dreiecke $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ jedesmal die gegenüberliegende Dreiecksseite als Element des Sekantensystems $\overline{x}$ entsprechen muss und, da dieses ebenso für den zweiten Verzweigungspunkt dieses Hauptpunktes gelten muss, so bemerkt man: „Dass die Seiten $\overline{o}_1\overline{o}_2\overline{o}_3$ des Hauptdreiecks $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ als Doppeltangenten der Directionscurven zu betrachten sind.“*)

Man kann auch sehr leicht die Berührpunkte $\varphi\varphi'$ dieser Doppeltangenten ermitteln. Projicirt man nämlich einen Verzweigungspunkt $\overline{V}$ eines Hauptpunktes aus den beiden andern Hauptpunkten auf

*) Vergl. die analoge Beziehung eines Involutionskegelschnitts in (92).

den Grundkegelschnitt, so schneidet die Verbindungslinie der sich ergebenden beiden Projectionspunkte die jenem Hauptpunkte gegenüberliegende Seite des Dreiecks $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ in dem einen ihrer beiden Berührpunkte. Analog ergibt sich der zweite Berührpunkt bei Wiederholung des Verfahrens mit dem andern Verzweigungspunkte $\bar{V}'$ u. s. w.

106. Eine Doppelpunktstangente d der Plancurve C_6^4 vereinigt (70) in ihrem Berührungspunkte einen der Nachbarpunkte des Doppelpunktes mit einem ihrer Tangentialpunkte, der sich jedoch auf dem andern Curvenzweige befindet; daraus resultirt, dass die Directionscurve den Grundkegelschnitt in den drei Paaren $\bar{A}\bar{A}'$-Nachbarpunkten, als Bilder der Doppelpunkte der Curve, durchsetzen muss und, dass in diesen Punkten die Curve von Tangenten berührt wird, welche als Strahlen des homologen Hauptpunktes im Dreiecke $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$, den Grundkegelschnitt zum andern Male in dem Bilde des Tangentialpunktes der Doppelpunktstangente treffen. Denn man halte sich nur die Construction (69) vor Augen: Wir suchen die $\bar{x}$-Sekante eines der beiden Nachbarpunkte $\bar{A}\bar{A}'$. Eine kurze Ueberlegung zeigt, dass diese $\bar{x}$-Sekante die Verbindungslinie des andern Nachbarpunktes mit dem der Dreiecksseite, welche das Paar $\bar{A}\bar{A}'$ trägt, gegenüberliegenden Hauptpunkte sein muss.

107. Eine Inflexionstangente i berührt die Plancurve 4ter Ordnung in drei coincidirenden Punkten (87).

Es ist somit anzunehmen, weil hier ein Zusammenfall eines der beiden Tangentialpunkte mit dem Berührpunkte auf der Curve statt hat, dass die Directionscurve den Grundkegelschnitt abermals in dem Bilde des nicht coincidirenden zweiten Tangentialpunktes durchsetzen muss und, dass wieder die Tangente in diesem Punkte, als Element des Sekantensystems $\bar{x}$, den Grundkegelschnitt in einem zweiten Punkte trifft, welcher bildlich den Berührpunkt der Curveninflexionstangente i mit dem anderen Tangentialpunkte vereinigt. Dieser letztere Schnittpunkt ist demnach das Bild $\bar{J}$ eines Inflexionspunktes J der Plancurve C_6^4.

108. Die vorliegende Directionscurve mit dem vorläufigen Symbole D_4^{12} besitzt drei Doppeltangenten, weshalb sich die Ordnung nach (9) um $3 \cdot 2 = 6$ Einheiten vermindert. Aber auch nach (8) erhalten wir die Ordnungszahl: $4(4-1) - 2 \cdot 3 = 6$, somit ist das richtige Symbol: D_4^6.

Das gleiche Resultat in Bezug der Ordnung der Directionscurve zeigt folgendes. Jede Seite des Dreiecks $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ ist (105) eine Doppeltangente und repräsentirt in ihren beiden Berührungspunkten $\varphi \varphi'$ vier Elemente. Da (106) die Curve in dem Paar Nachbarpunkten $\bar{A}\bar{A}'$ dieser Seite diese selbst durchsetzt, so hat eine Seite des Dreiecks $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ mit der Curve im Ganzen sechs Punkte gemein.

Bezüglich der Classe der Directionscurve des

absoluten symmetrischen Systems der Tangentialpunkte einer ebenen Curve C_6^4 gilt das Gesetz:

„Die Classenzahl degenerirt um ebensoviele Einheiten, als der Grundkegelschnitt Seiten des Hauptdreiecks $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ zu Tangenten besitzt."

Wir sehen, dass das vorstehende Gesetz parallel der in (74) ausgedrückten Regel über die Classe einer Plancurve 4[ter] Ordnung ist.

109. Ist eine Plancurve C_3^4 gegeben, so enthält sie (75) drei Spitzen, deren Tangenten sich gemeinschaftlich in einem Punkte schneiden. Der Grundkegelschnitt, auf welchem die Curve abgebildet wird, berührt alle drei Seiten des Hauptdreiecks $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$. Es entsteht die Frage nach dem Systeme der Tangentialpunkte auf der Plancurve C_3^4?

Diese Frage wird dahin beantwortet: dass das System der Tangentialpunkte diesfalls eine allgemeine quadratische Involution auf der Plancurve C_3^4 ist. Nach (91) wird diese Involution auf dem Grundkegelschnitt central und offenbar ist ihr Centrum das Bild des gemeinsamen Schnittes der drei Spitzentangenten der Plancurve (75). Eine einfache geometrische Ueberlegung zeigt, dass die Involution auf dem Grundkegelschnitt immer elliptisch sein muss, also keine reellen Doppelelemente aufweist.

110. Ein ausgezeichnetes Interesse erweckt der Fall einer Plancurve C_4^4 mit zwei Spitzen. Man weiss

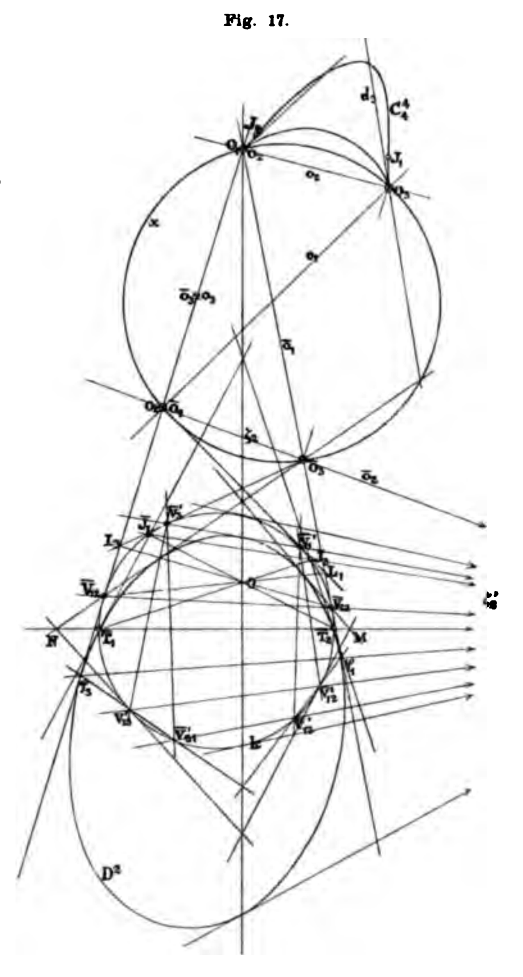
aus (108), dass das Bild einer derartigen Curve einen Grundkegelschnitt gibt, der von zwei Seiten des Hauptdreiecks $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ tangirt wird. Schneidet die dritte Seite des Hauptdreiecks den Grundkegelschnitt nicht, so ist der entsprechende Doppelpunkt der Plancurve C_4^4 ein Einsiedler (isolirter Punkt) (5) vermöge des imaginären Nachbarpunktenpaares $\bar{A}\bar{A}'$ auf dieser Dreiecksseite. In solchem Falle besitzt die Plancurve ein Paar reeller Inflexionen und die Bilder der Tangentialpunktenpaare formiren auf dem Grundkegelschnitt ein symmetrisches Elementensystem 2[ten] Grades, dessen Directionscurve nach (28) von der 2[ten] Classe und nach (8) also auch von der 2[ten] Ordnung: ein Kegelschnitt ist, welcher der Directionskegelschnitt benannt wird.

111. Die Construction (104) der $\bar{x}$-Sekanten lässt uns jedenfalls fünf beliebige Tangenten des Directionskegelschnitts ermitteln, wodurch dieser als bestimmt erscheint. Er hat jedoch mit dem Grundkegelschnitt nur zwei reelle gemeinsame Schnittpunkte $\bar{T}_1 \bar{T}_2$, was aus der Natur der Plancurve C_4^4 folgt. Diese beiden Schnittpunkte kann man durch bekannte Elementarconstructionen linear erhalten; und jeder derselben ist nach (107) das Bild des Tangentialpunktes T einer Inflexionstangente i der Plancurve. Ebenso kann man linear in jedem Schnittpunkte $\bar{T}$ die Tangente an den Directionskegelschnitt finden, welche als Element des $\bar{x}$-Sekantensystems den Grundkegelschnitt zum

andern Male in dem Bilde $\bar{J}$ des Berührpunktes J der betreffenden Wendetangente trifft.

112. Weit einfacher, als nach der allgemeinen Linearconstruction, gelangt man zu den beiden Schnittpunkten $\bar{T}_1 \bar{T}_2$, welche Grund- und Directionskegelschnitt gemeinschaftlich haben, auf folgendem Weg. (Fig. 17.)

Fig. 17.



Wegen der Beziehung in (105), wornach die Seiten $\bar{o}_1 \bar{o}_2 \bar{o}_3$ des Hauptdreiecks $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ die Directionscurve als Doppeltangenten berühren, erhalten wir die Seiten $\bar{o}_1 \bar{o}_3$, die wir als jene nach der obigen Voraussetzung den Grundkegelschnitt k berührenden annehmen wollen, als Tangenten des Directionskegelschnitts D^2. Deren Berührungspunkte $\bar{V}_{12} \bar{V}_{23}$ mit dem Grundkegelschnitt

sind die Coincidenzverzweigungspunkte desselben. Die Berührpunkte $\varphi_1 \varphi_3$ des Dreiecksseitenpaares $\bar{o}_1 \bar{o}_3$ mit dem Directionskegelschnitte werden nach der Construction (105) gefunden. Man projicirt zu diesem Zwecke das vorhin gewonnene Verzweigungspunktenpaar $\overline{V}_1' \overline{V}_3'$ aus den Hauptpunkten $\overline{O}_1 \overline{O}_3$ abermals auf den Grundkegelschnitt k, wodurch sich die Projectionen $\overline{V}_{13}' \overline{V}_{31}'$ ergeben. Die Verbindungslinien $| \overline{V}_{13}' \overline{V}_{12}' |$, $| \overline{V}_{31}' \overline{V}_{23}' |$ erfüllen auf den bezüglichen Hauptlinien $\bar{o}_1 \bar{o}_3$ die fraglichen Punkte $\varphi_1 \varphi_3$.

113. Nach (82) involviren die beiden Hauptpunkte $\overline{O}_1 \overline{O}_3$ einerseits, sowie andererseits der Grundkegelschnitt für sich, coaxial auf der Geraden $\bar{o}_2$ je eine Punkteninvolution, deren gemeinschaftliche Doppelelemente $\zeta_2 \zeta_2'$, wie dort angegeben ist, zu bestimmen sind. Einige Betrachtung lässt uns die Verbindungslinie $| \overline{O}_2 \zeta_2 |$ als eine gemeinschaftliche Polare und den Punkt ζ_2' als einen gemeinschaftlichen Pol der beiden Curven: Grund- und Directionskegelschnitt erkennen. Durch den Pol ζ_2' zieht aber das Geradenpaar $| \overline{V}_{12} \overline{V}_{23} |$, $| \varphi_1 \varphi_3 |$.

114. Gelegentlich der Ermittlung des Punktenpaares $\varphi_1 \varphi_3$ mussten die Verzweigungspunkte $\overline{V}_1' \overline{V}_3'$ der beiden Hauptpunkte $\overline{O}_1 \overline{O}_3$ aus dem dritten Hauptpunkte $\overline{O}_2$ nach $\overline{V}_{23}' \overline{V}_{12}'$ auf den Grundkegelschnitt projicirt werden. Zieht man in diesen Projectionspunkten die Tangenten, so schneidet sich diejenige im Punkte $\overline{V}_{12}'$ mit der Verbindungsgeraden $| \overline{O}_1 \overline{V}_{23} |$

in einem Punkte M und ebenso erhält man einen zweiten Punkt N aus der in $\overline{V}_{23}'$ gehenden Grundkegelschnittstangente mit der Geraden $|\overline{O}_3\overline{V}_{12}|$.

Die Verbindungslinie $|MN|$ ist ein Strahl des Poles ζ_2' und gleichzeitig eine gemeinschaftliche Sekante der beiden betrachteten Kegelschnitte. Aus diesem Grunde sind die Schnittpunkte $\overline{T}_1\overline{T}_2$, welche die Gerade $|MN|$ auf dem Grundkegelschnitt hervorbringt, die Bilder der Tangentialpunkte T_1T_2 der zwei reellen Inflexionstangenten der Plancurve C_4^4.

115. Für die Construction der Tangenten in den Punkten $\overline{T}_1\overline{T}_2$ an den Directionskegelschnitt D^2, beziehungsweise für die Ermittlung der Schnittpunkte $\overline{J}_1\overline{J}_2$ dieser Tangenten mit dem Grundkegelschnitte, zeigen wir nachstehende Vereinfachung.

Die Verzweigungstangenten $|\overline{O}_1\overline{V}_1'|$, $|\overline{O}_3\overline{V}_3'|$ treffen die gegenüberliegende der beiden Dreiecksseiten $\overline{o}_1\overline{o}_3$ in Punkten L_1L_3. Sucht man den Schnitt:

$$(|L_1\overline{V}_{12}|, |L_3\overline{V}_{23}|) = O,$$

so gehört derselbe der gemeinschaftlichen Polaren $|\overline{O}_2\zeta_2|$ als Punktelement an. Nun treffen die Verbindungslinien $|O\overline{T}_1|$, $|O\overline{T}_2|$ den Grundkegelschnitt in den verlangten Bildern $\overline{J}_2\overline{J}_1$ der beiden Inflexionspunkte J_2J_1 auf der Plancurve C_4^4.

Die Verbindungslinien $|\overline{T}_1\overline{J}_1|$, $|\overline{T}_2\overline{J}_2|$ sind die Tangenten des Directionskegelschnitts in den Punkten $\overline{T}_1\overline{T}_2$ und treffen sich gemeinsam auf der Polaren $|O_2\zeta_2|$ als Elemente des $\overline{x}$-Sekantensystems. Gleichzeitig kann

bemerkt werden, dass die Verbindungsgerade $|\overline{J}_1\overline{J}_2|$ durch den Pol ζ_2' geht.

116. Wenn man eine Directionscurve D_4^6 des absoluten symmetrischen Systems einer ebenen Curve C_6^4 voraussetzt, so kann man nach (29) die polar-reciproke Curve D_6^4 construiren. Dieselbe ist der geometrische Ort der Pole der einzelnen Elemente der $\bar{x}$-Sekanten (104). Die Eigenschaften dieser Curve D_6^4 sind jenen der D_4^6 dual gegenüberstehend. Demgemäss wird diese Curve die Pole der Seiten des Hauptdreiecks $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ als Doppelpunkte besitzen und der Construction (105) der Berührpunkte einer Doppeltangente wird jene der Doppelpunktstangenten polar gegenüberstehen. Nämlich: Wir brauchen nur den Pol der Verbindungslinie der beiden Projectionspunkte eines Verzweigungspunktes (105) zu ermitteln, so zieht durch den diesem Verzweigungselement zugeordneten Doppelpunkt der Curve D_6^4 dessen eine Tangente u. s. w.

117. Aus den gesammten bis jetzt angestellten Untersuchungen sanktionirt sich der folgende Satz:

„Die Directionscurve D_4^6 als Enveloppe des absoluten symmetrischen Punktensystems 4ten Grades einer Plancurve 4ter Ordnung, welches System auf einem Grundkegelschnitt

„Die Directionscurve D_6^4 als Ortscurve des absoluten symmetrischen Tangentensystems 4ten Grades einer Plancurve 4ter Ordnung, welches System auf einem Grundkegelschnitt abge-

abgebildet erscheint, ist 4ter Classe und 6ter Ordnung;

sie hat mit dem Grundkegelschnitt acht gemeinschaftliche Tangenten, welche diesen in Doppelelementen 1ter Art berühren und die Bilder der Berührpunkte der vier Doppeltangenten der Plancurve sind;

sie hat mit dem Grundkegelschnitt sechs gemeinschaftliche Punkte, welche die Verzweigungselemente der Doppelpunkte 2ter Art sind; diese letztern selbst ergeben sich als Schnittpunkte jener Sehnen, die in den Verzweigungspunkten die Directionscurve tangiren, den Grundkegelschnitt zum andern Male schneiden, und sie sind die Bilder der sechs Inflexionspunkte der Plancurve, während die Verzweigungspunkte die Tangentialpunkte der entsprechenden

bildet erscheint, ist 4ter Ordnung und 6ter Classe;

sie hat mit dem Grundkegelschnitt acht gemeinschaftliche Punkte, welche die Doppelelemente 1ter Art sind und die Berührpunkte der vier Doppeltangenten der Plancurve abbilden;

sie hat mit dem Grundkegelschnitt sechs gemeinschaftliche Tangenten, welche ihn in den Verzweigungselementen der Doppelpunkte 2ter Art berühren; diese letztern selbst ergeben sich als Berührpunkte jener Tangenten, die von dem Berührpunkte einer Verzweigungstangente auf der Directionscurve zum andern Male an den Grundkegelschnitt ziehen, und sie sind die Bilder der sechs Inflexionspunkte auf der Plancurve, während die Berührungspunkte der

Inflexionstangenten auf dem Grundkegelschnitte abbilden;

sie hat weiter noch die sechs Nachbarpunktenpaare $\bar{A}\bar{A}'$, welche das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ als Bilder der Doppelpunkte der Plancurve auf dem Grundkegelschnitte herausschneidet, gemeinschaftlich und wird in diesen Punkten von Geraden berührt, die als Sehnen des Grundkegelschnitts zum andern Male das Bild des einer Doppelpunktstangente angehörigen Tangentialpunktes angeben."

Verzweigungstangenten die Tangentialpunkte der entsprechenden Inflexionstangenten auf dem Grundkegelschnitt abbilden;

sie hat weiter noch die sechs Tangenten, welche in den Nachbarpunktenpaaren $\bar{A}\bar{A}'$, die das Hauptdreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ auf dem Grundkegelschnitt herausschneidet, an diesen ziehen, gemeinschaftlich und wird von diesen Tangenten in Punkten berührt, von welchen zum andern Male an den Grundkegelschnitt eine Tangente zieht, die auf ihm das Bild des einer Doppelpunktstangente angehörigen Tangentialpunktes angibt."

118. Setzen wir als Plancurve eine C_6^4 voraus, so wird ihr Bild, der Grundkegelschnitt k, von den Seiten des Hauptdreiecks $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ in reellen oder imaginären Nachbarpunktenpaaren $\bar{A}\bar{A}'$ mit der besonderen Bedingung geschnitten, dass in beiden Fällen die Hauptpunkte $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ sich ganz ausserhalb des Grundkegel-

schnitts befinden. Im ersten Falle ist die Plancurve C_6^4 eine solche mit drei eigentlichen Doppelpunkten und durchwegs imaginären Inflexionen; folglich wird auch die Directionscurve des Tangentialpunkten-Systems eine D_4^6 mit imaginären Doppelelementen 2ter Art (Fig. 15.) sein müssen. Analog verhält es sich mit der polaren Directionscurve D_6^4.

Im zweiten Falle ist die Plancurve C_6^4 eine solche mit drei isolirten Doppelpunkten und durchwegs reellen Inflexionen; demnach wird auch die Directionscurve alle sechs Doppelelemente 2ter Art reell besitzen müssen. Die Directionscurve in (Fig. 16.) ist ihrem Typus nach scheinbar von der 4ten Ordnung. Diese Behauptung lässt sich genau genommen mit dem Resultate (108) nicht vereinigen, demzufolge sie 6ter Ordnung sein muss, sofern nicht gleichzeitig eine Degeneration ihrer Classe stattfindet. In der That müssen wir auch die Directionscurve in der bezeichneten Figur eigentlich als eine D_4^6 anerkennen, wenn das Gesetz in (106) festgehalten wird, wornach die Nachbarpunktenpaare $\overline{A}\overline{A}'$ als Elemente dieser Curve zu gelten haben. Denn, es hat für die Sache keinen wesentlichen Einfluss, wenn, wie in dem vorliegenden Beispiele der Figur 16, diese Nachbarpunktenelemente imaginär sind.

Anmerkung. Die Eigenschaft, dass eine unicursale Plancurve 4ter Ordnung nicht mehr als sechs reelle Inflexionen haben kann, ist insbesondere durch die Betrachtungen in den Artikeln (106) und (107) nachgewiesen. Wir haben in (106) gesehen, dass die Directionscurve des absoluten Tangentialpunkten-Systems den Grundkegelschnitt in den sechs $\overline{A}$-Nachbarpunkten durchsetzen muss, und in (107) ist gezeigt, dass sie auch mit dem Grundkegelschnitt die Tangentialpunktenbilder

$\bar{T}$ der Inflexionstangenten i der Curve C_6^4 gemeinschaftlich hat. Andere gemeinsame Punktenelemente können aber nicht vorkommen, wie die Untersuchungen dort nachweisen. Da nun der Grundkegelschnitt mit einer Curve 6ter Ordnung nicht mehr als zwölf Punkte besitzen kann, von diesen jedoch sechs durch die $\bar{A}$-Elemente aufgenommen werden, so ergibt der Rest die sechs $\bar{T}$-Elemente.

Allerdings besteht in Bezug der Realität der Punktenbilder $\bar{A}\bar{T}$ ein merkwürdiger Zusammenhang, der im Allgemeinen sich dahin zeigt: „Dass reelle $\bar{A}$-Paare imaginäre $\bar{T}$-Paare bedingen, und umgekehrt," so dass also der Grundkegelschnitt eigentlich nur höchstens sechs eigentliche Punkte, die paarweise $\bar{A}$- oder $\bar{T}$-Elemente sind, mit der Directionscurve besitzt. Diese letztere ändert dann ihren Charakter in der Weise, dass sie statt der sonst auch vorkommenden Doppelpunkte, Spitzen besitzt etc. Unsere Figur (15.) zeigt diesen Fall an, und wir sehen in derselben deutlich die vorhin bezeichnete Connexität zwischen den $\bar{A}$- und den $\bar{T}$- resp. J-Paaren.

Vierter Abschnitt.

Die Erzeugnisse der absoluten zwei-vierdeutigen Elementensysteme auf dem Grundkegelschnitte.

§ 13. Geometrische Orte. (Sekanten- und Berührungscurven.)

119. Das Tangentensystem, dessen Enveloppe eine ebene Curve 4ter Ordnung ist, ruft auf ihr nach (101) die beiden zwei-vierdeutigen Punktensysteme hervor, deren eines durch die Curvenpunkte selbst als das zweideutige, und deren anderes durch die jenen zugeordneten (begleitenden) Tangentialpunktenpaare als das vierdeutige System repräsentirt wird.

Bildet man diese beiden, absolut auf der Plancurve vorhandenen zwei-vierdeutigen Punktensysteme auf einem Grundkegelschnitt ab, so lassen sie sich auf mannigfaltige Weise in eine gegenseitige Beziehung zu einander versetzen, wodurch ihre Zwei-vierdeutig-

keit keinerlei Einbusse erleidet. Nimmt man z. B. zwei beliebige Punkte $\bar{S}\bar{S}'$ auf dem Grundkegelschnitt als die Centra von Strahlenbüscheln an, deren Elemente durch die Elemente der zwei-vierdeutigen Systeme gehen, also etwa das Centrum $\bar{S}$ dem zweideutigen und $\bar{S}'$ dem vierdeutigen zugewiesen ist, so entstehen zwei Strahlenbüschel $\bar{S}\bar{S}'$ in zwei-vierdeutiger Beziehung.

Jeder Strahl des zweideutigen Büschels $\bar{S}$ verschneidet sich mit dem ihm entsprechenden Strahlenpaare des vierdeutigen Büschels S' in einem Punktenpaare und der Ort dieser so hervorgebrachten Punktenpaare ist eine Curve, welche nach (31) von der $2 + 4 = 6^{\text{ter}}$ Ordnung und $2 \cdot 2 \cdot 4 = 16^{\text{ter}}$ Classe ist und in $\bar{S}$ einen zweifachen, in $\bar{S}'$ einen vierfachen Punkt enthält, weshalb sie das Symbol: S_{16}^{6} verlangt.

120. Diese Hilfscurve hat nach (10) mit dem Grundkegelschnitt $2 \cdot 6 = 12$ Punkte gemeinsam. Von diesen 12 Schnittpunkten werden jedoch sechs durch die beiden mehrfachen Punkte $\bar{S}\bar{S}'$ repräsentirt, so dass nur mehr sechs gemeinschaftliche Schnittpunkte $\bar{J}$ verbleiben, welche sich durch eine einfache geometrische Ueberlegung als diejenigen ergeben, in denen je ein Element des zweideutigen Systems mit dem einen der beiden des vierdeutigen Systems vereinigt ist. Hieraus sieht man, dass die $\bar{J}$-Punkte nichts anderes sind, als die Bilder der Inflexionspunkte J der Plancurve 4ter Ordnung.

Soll man von einem Inflexionspunkte J, der

mittelst der Hilfscurve S_{16}^{6} auf dem Grundkegelschnitt abgebildet gefunden wurde, den begleitenden Tangentialpunkt T ermitteln, so brauchen wir nur das Bild J desselben der Construction (69) zu unterwerfen, wobei sich erweisen wird, dass die entsprechende $\bar{x}$-Sekante durch den $\bar{J}$-Punkt geht und als Sehne den Grundkegelschnitt zum andern Male in dem Bilde $\bar{T}$ des gefragten Tangentialpunktes T trifft.

121. Eine Hilfscurve anderer Art erzeugt man dadurch, wenn man auf dem Grundkegelschnitt einen beliebigen Punkt $\ddot{S}$ als das Centrum des zweideutigen Systems annimmt und dessen Strahlenelemente mit den entsprechenden $\bar{x}$-Geraden (69) verschneidet. Die dadurch entstehende Ortscurve enthält $\bar{S}$ als einen Doppelpunkt und schneidet, wie vorhin die Hilfscurve in (119), die Bilder J der sechs Inflexionselemente der Plancurve C_{6}^{4} auf dem Grundkegelschnitte heraus.

Für die graphische Ermittlung der Inflexionselemente einer Plancurve 4[ter] Ordnung werden die beiden vorbezeichneten Hilfscurven am vortheilhaftesten zu verwenden sein. Wir bezeichnen sie charakteristisch als „Sekantencurven".

122. Wenn man die beiden zwei-vierdeutigen, auf dem Grundkegelschnitt conlocalen, absoluten Punktensysteme einer Plancurve C_{6}^{4} gegeben hat, so lässt sich immerhin das diesen Systemen perspectivisch zugehörige Tangentensystem, welches selbstverständlich gleichfalls zwei-vierdeutig ist, auf dem Grundkegel-

schnitt nach (22) in gegenseitige Beziehung bringen. Darnach wissen wir, dass jeder Tangente des zweideutigen Systems ein Paar Tangenten des vierdeutigen Systems entsprechen. Auf diese Weise enthält jedes Tangentenelement des ersteren Systems zwei Punktenschnitte, welche als geometrischen Ort die Directionscurve der beiden solcherart aufeinander bezogenen Systeme erzeugen. (Fig. 18, siehe Tafel I.)

Die Ordnung dieser Directionscurve ist nach (22) $2 + 4 = 6$ und ihr vorläufiges Symbol: D^6.

123. Jedem der beiden Verzweigungspunkte eines der Hauptpunkte $\ddot{O}_1\bar{O}_2\ddot{O}_3$ entspricht (105) als Element des Sekantensystems $\dot{x}$ (104) die gegenüberliegende Dreiecksseite $\bar{o}_2\bar{o}_1\bar{o}_3$; daraus folgt, dass den Verzweigungsstrahlen des betreffenden Hauptpunktes involutorisch die Tangenten in dem Nachbarpunktenpaare $\bar{A}A'$ der Dreiecksgegenseite entsprechend sind und dieses letztere Tangentenpaar einen Doppelpunkt $\bar{\Omega}$ der Directionscurve erzeugen muss. Noch mehr wird die Richtigkeit dessen einleuchten, wenn wir jeden Punkt eines Paares $\bar{A}\bar{A}'$ der Construction (69) unterziehen, wobei sich zeigt, dass jedesmal einem dieser Punkte die Tangente in dem andern als Element des $\bar{x}$-Sekantensystems vertauschungsfähig entspricht. Für die Directionscurve ergibt sich demnach zunächst, dass dieselbe die drei Pole $\bar{\Omega}$ der Seiten des Hauptdreiecks $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ bezugs des Grundkegelschnitts k als Doppelpunkte besitzt.

124. In (104) wurde gezeigt, dass jedem Endpunkte $\overline{B}$ einer p-Sehne (der doppelt berührenden Kegelschnitte) die Tangente im andern Sehnenendpunkte $\overline{B}'$ als Element des $\overline{x}$-Sekantensystems vertauschungsfähig entspricht, woraus wir ebenfalls schliessen müssen, dass auch das Tangentenpaar in den Endpunkten einer p-Sehne einen Doppelpunkt P der Directionscurve herausschneidet; somit der Satz: Die Pole P der vier p-Sehnen des Grundkegelschnitts sind Doppelpunkte der Directionscurve.

125. Die vorstehenden synthetischen Untersuchungen lassen uns auf der Directionscurve der zweivierdeutigen Tangentensysteme im ganzen sieben Doppelpunkte: $3\overline{\Omega} + 4P$, erkennen, welche durch Tangentenpaare des Grundkegelschnitts sich ausschneiden. Diese Tangentenpaare sind aber auch, wie man sich leicht überzeugt, gleichzeitig Doppelpunktstangenten für jeden betreffenden Doppelpunkt $\overline{\Omega}$, P.

Dasselbe Resultat gibt die Formel in (23), wenn $m = 2$, $n = 4$ gesetzt wird:

$$\left(\frac{2(2-1)}{2} + \frac{4(4-1)}{2}\right) = 7.$$

126. Nach (21) hat das zweideutige System $2 \cdot 4(2-1) = 8$ Doppelelemente, welche die acht Berührungselemente $\overline{B}$ der vier doppelt berührenden Kegelschnitte δ (Bilder der Berührpunkte der vier Doppeltangenten der Plancurve C_6^4) vorstellen. In gleicher Weise enthält das vierdeutige System $2 \cdot 2(4-1)$

= 12 Doppelelemente. Diese zwölf Doppelelemente besitzt die Directionscurve mit dem Grundkegelschnitt derart gemeinschaftlich, dass diese beiden Curven in den Paaren derselben eine gegenseitige Berührung eingehen und somit diese zwölf Elemente in sechs Doppelelemente $\bar{J}$ zerfallen, welchen ebensoviele Verzweigungselemente als gemeinschaftliche Tangenten beider Curven entsprechen. Wegen dieser Eigenschaft wollen wir eine Directionscurve dieser Art eine „Berührungscurve" nennen.

„Die sechs Doppelelemente $\bar{J}$, in welchen der Grundkegelschnitt von der Directionscurve D^6 berührt wird, sind die Bilder der sechs Inflexionspunkte und die noch weiter zwischen dem Grundkegelschnitt und der Directionscurve sechs gemeinschaftlichen Tangenten berühren den ersteren in den Bildern $\bar{T}$ der sechs Tangentialpunkte der Inflexionstangenten der Plancurve C_6^4, während ihr Berührpunkt τ auf der Directionscurve ein Tangentialpunkt für die zugehörige gemeinschaftliche Berührungstangente der beiden Curven ist."

127. Die bisherigen Erörterungen ergeben, dass die Directionscurve D^6 mit dem Grundkegelschnitt in allem 32 gemeinschaftliche Tangenten hat und dass also ihre Classenzahl $\frac{32}{2} = 16$ sein müsste, sofern sie andere Tangentenelemente mit dem Grundkegelschnitt nicht gemein hat. Dieses kann aber nicht der Fall

sein und wir finden die Classenzahl der Directionscurve auch nach der Formel in (24) bestätigt, da: $2mn = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$ ist. Aber auch die Formel in (8) gibt uns die gleiche Classenzahl der Curve, wenn $d = 7$, $n = 6$ und, da die Curve keine Rückkehrpunkte besitzt, $r = o$ angenommen wird:

$$6(6-1) - 2 \cdot 7 = 16.$$

Die Directionscurve der vorliegenden Beziehung des absoluten zwei-vierdeutigen Tangentensystems einer ebenen Curve 4ter Ordnung hat somit im Allgemeinen das Symbol: D_{16}^{6}.

128. Die sieben Doppelpunkte (125) der Directionscurve D_{16}^{6} in Fig. 18. stehen in einer bemerkenswerthen planimetrischen Beziehung: „Sie liegen tripelweise auf sechs Geraden, so dass jedes Tripel sich aus einem $\bar{\Omega}$-Pol und einem Paare P-Pole zusammensetzt. Darnach bilden die drei $\bar{\Omega}$-Pole ein Dreieck und ebenso drei P-Pole ein zweites Dreieck, so dass die Ecken des ersteren in den Seiten des letzteren zu liegen kommen; diese beiden Dreiecke sind perspectivisch, d. h. die gegenüberliegenden Ecken verbinden sich in drei Geraden, welche sich in einem Punkte gemeinsam treffen. Dieser gemeinsame Schnittpunkt ist der vierte P-Pol. Ferner trifft jede Seite des Dreiecks der P-Pole mit der gegenüberliegenden der $\bar{\Omega}$-Pole in einem ζ-Punkt (82) auf jener Seite des Hauptdreiecks $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ zusammen, welche die Polare des in der P-Polseite liegenden $\bar{\Omega}$-Doppelpunktes ist, während die

Geraden, welche sich gemeinsam in dem vierten P-Pole schneiden, jedesmal durch den betreffenden conjugirten ζ-Punkt dieser Hauptdreiecksseite ziehen."

129. In Bezug der Art der Directionscurve D_{16}^{6} gilt folgender Satz: „Je nachdem die zugrundeliegende Plancurve 4ter Ordnung 0, 1, 2, 3 Spitzen enthält, degenerirt die Ordnungszahl der Directionscurve um ebensoviele Einheiten."

Demnach wird z. B. einer Curve 3ter Classe eine Curve 3ter Ordnung u. s. w. gegenüberstehen.

130. Es lässt sich eine Beziehung der zwei absoluten zwei-vierdeutigen Elementensysteme noch in anderer Weise, als dies bisher geschehen ist, auf dem Grundkegelschnitt betrachten. Wir wissen aus (102), dass das vierdeutige System ein symmetrisches 4ten Grades ist. Ebenso ist das zweideutige System der Elemente des Grundkegelschnitts vom 2ten Grade. Verbinden wir in jedem dieser zwei Systeme die conjugirten Elemente durch Gerade, so sind diese im symmetrischen Systeme die $\bar{x}$-Sekanten (104) und in dem Systeme der einzelnen Punktenelemente des Grundkegelschnitts offenbar die an demselben gehenden Tangenten.

Jeder Tangente dieses Grundkegelschnitts kann man die entsprechende $\bar{x}$-Sekante beziehlich zuweisen, und die einzelnen Schnitte solch' zugewiesener Geradenpaare erzeugen einen geometrischen Ort, welcher ohne Schwierigkeit als eine Curve 6ter Ordnung

erkannt wird. Dieselbe sei vorderhand mit dem Symbole: B^6 angezeigt.

131. In (104) ist nachgewiesen, dass jedem Endpunkte einer p-Sehne die Tangente in dem andern Endpunkte als Element des $\bar{x}$-Sekantensystems entspricht, und dass diese Eigenschaft involutorisch ist, woraus wir schliessen, dass die vier Pole P der p-Sehnen als Doppelpunkte der Curve B^6 angesehen werden müssen.

Jedes Element der auf den Seiten des Hauptdreiecks $O_1 O_2 O_3$ befindlichen $\zeta\zeta'$-Punktenpaare (82), in welchem jeden je zwei p-Sehnen zusammentreffen, ruft auf dem Grundkegelschnitte eine quadratische Involution hervor. Man wird sich nun auf synthetischem Wege leicht davon überzeugen können, dass den beiden Asymptotenstrahlen dieser Involution (die Tangenten des ζ-Punktes) solche Elemente des $\bar{x}$-Sekantensystems entsprechen, welche gleichzeitig Elemente der Strahleninvolution sind. Hieraus ergibt sich, dass die sechs ζ-Punkte ebenfalls Doppelpunkte der Curve B^6 sind, und dass diese somit im Ganzen zehn Doppelpunkte enthält.

Mit Hilfe der vorstehenden Ergebnisse lässt sich jetzt die Classe der Curve nach Formel (8) festsetzen:

$$6(6-1) - 2 \cdot 10 = 10,$$

so dass ihr das Symbol: B_{10}^6 zukommt.

132. Die Curve B_{10}^{6} besitzt nach (10) mit dem Grundkegelschnitte $2 \cdot 6 = 12$ gemeinschaftliche Punkte; diese paaren sich jedoch, so dass sich beide Curven in sechs Punkten gegenseitig einfach berühren, welche Berührungspunkte offenbar die gemeinschaftlichen Elemente der beiden zwei-vierdeutigen Systeme auf dem Grundkegelschnitte repräsentiren und somit die Bilder der sechs Inflexionen in der Plancurve C_6^4 sind. Die Curve B_{10}^{6} zählt also ebenfalls zur Gattung der in (126) genannten „Berührungscurven".

§ 14. Linearbeziehungen.

133. Die Bilder der sechs reellen Inflexionspunkte einer Plancurve C_6^4 zeigen eine bemerkenswerte Figur. (Fig. 18, s. Taf. I.)

Das vollständige Vierseit der p-Sehnen (82), dessen drei Paar Gegenecken die Punktenpaare $\zeta\zeta'$ sind, zerfällt in vier Dreiecke, deren Ecken einzeln auf den Seiten des Hauptdreiecks $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ liegen. Jedem dieser Dreiecke entspricht in Bezug auf den Grundkegelschnitt k ein polares Dreieck. Bekanntlich sind solche Figurenpaare perspectivisch, d. h. es liegen die polar gegenüberliegenden Eckenpaare auf je einer Geraden π, welche drei Geraden sich in einem Punkte P_4 schneiden, wie wir schon oben gesehen haben.

Die Bilder $\overline{J}$ der sechs reellen Inflexionspunkte J sind die Ecken eines dem Grundkegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks, dessen drei Diagonalen sich zu Paaren wechselweise

auf den drei Verbindungslinien π in drei μ-Punkten schneiden.

Aus diesem Gesetze muss abgeleitet werden: dass bei Bekanntgabe von drei diagonal-gegenüberliegenden $\bar{J}$-Punkten die drei übrigen $\bar{J}$-Elemente linear construirt werden können.

Fünfter Abschnitt.

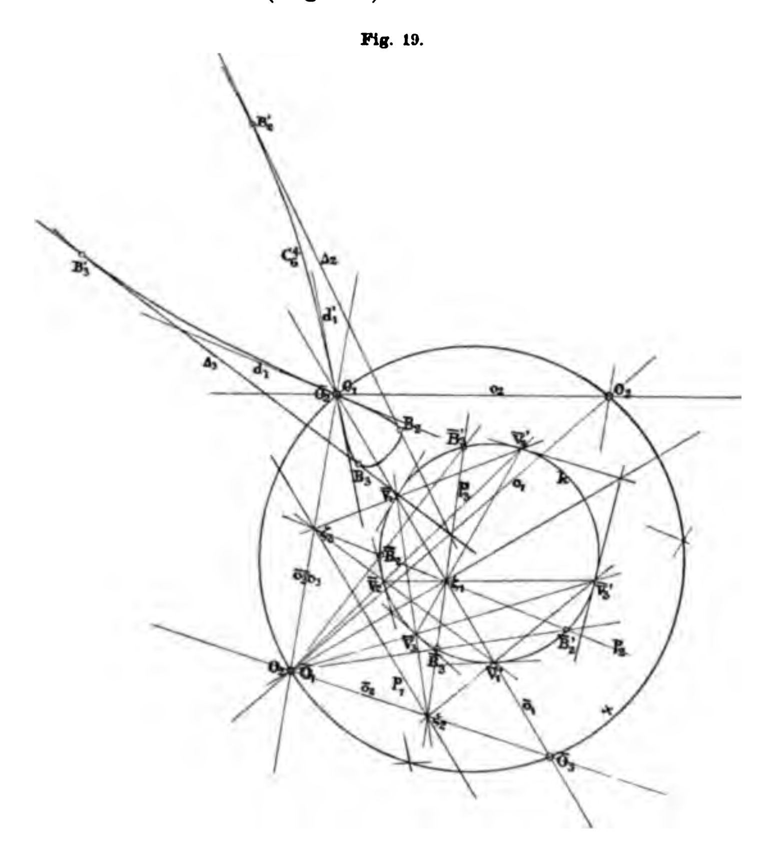
Doppelpunkte als Inflexionsknoten.

§ 15. Polarbeziehung im Grundkegelschnitte.

134. Die Eigenart der Doppelpunkte einer Curve 4ter Ordnung wird eine besondere, wenn die Tangenten eines solchen Punktes zugleich Wendetangenten sind, in welchem Falle der Doppelpunkt ein Inflexionsknoten ist. Diese Eigenthümlichkeit zeigt sich bei der quadratischen Abbildung auf einem Grundkegelschnitte k dadurch an, dass der betreffende Hauptpunkt der Pol jener Hauptlinie des Dreiecks $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ in Bezug des Grundkegelschnitts ist, welche ihm als Seite in diesem Dreiecke gegenüberliegt. Es wird also auch ganz gleichgiltig sein, ob der betrachtete Doppelpunkt ein eigentlicher Knoten oder ein isolirter Punkt ist, immer wird er als Inflexionsknoten aufzufassen sein, sobald die eben ausgesprochene Bedingung erfüllt wird. Diese letztere wird bekanntlich damit charakterisirt, dass die Verzweigungspunkte jenes Haupt-

punktes mit den Nachbarpunkten (64) auf der gegenüberliegenden Seite des Dreiecks $O_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ paarweise zusammenfallen. (Fig. 19.)

Fig. 19.



Um die diesfalls auftretenden Beziehungen zu zeigen, gehen wir z. B. von der Annahme aus, der Hauptpunkt $O_2 \equiv \bar{O}_1$ sei in Bezug des Grundkegelschnitts k der Pol der Seite $\bar{o}_1 \equiv |O_1\bar{O}_3|$, so dass die Berührpunkte $\bar{V}_1\bar{V}_1'$ der aus O_1 an k gezogenen Tangenten paarweise mit den bezüglichen Nachbarpunkten $\bar{A}_1\bar{A}_1'$ dieser Seite in Coincidenz kommen; dann wird der

homologe Hauptpunkt $O_1 \equiv \bar{O}_2$ im Systeme der Plancurve C_6^4 ein Inflexionsknoten, d. h. seine beiden Tangenten $d_1 d_1'$ werden in ihm Wendetangenten sein und er selbst wird zwei Inflexionspunkte der Curve vereinigen müssen. Die Construction der Wendetangenten $d_1 d_1'$ erfolgt nach (70), und es kann eine solche Gerade ausser dem O_1-Punkte mit der Curve keinen andern Punkt gemein haben, weil sie in ihrem Berührpunkte a priori drei Curvenpunkte vereinigt und einen vierten Punkt überdies auf dem zweiten Curvenzug in O_1 als Tangentialpunkt in ihm nochmals besitzt.

135. Da die Hauptlinie $\bar{o}_1$ als Polare des Punktes O_1 die beiden Hauptpunkte $\bar{O}_2 \bar{O}_3$ enthält, so müssen die Verzweigungspaare $\bar{V}_2 \bar{V}_2'$, $\bar{V}_3 \bar{V}_3'$ dieser Hauptpunkte jedes Mal einem Strahle des Polpunktes $O_1 (\equiv \bar{O}_2)$ angehören. Wir wissen, dass dadurch eine Involution auf dem Grundkegelschnitte k hervorgerufen wird, deren Centrum der Hauptpunkt $\bar{O}_1$ und deren Axe die Hauptlinie $\bar{o}_1$ ist. Demzufolge wird jeder Strahl des Büschels $\bar{O}_1 (\equiv O_2)$, also auch diejenigen Strahlen, welche die genannten Verzweigungselemente tragen, den Grundkegelschnitt k in einem Punktenpaare $\bar{X}_1 \bar{X}_1'$ und die Gerade $\bar{o}_1$ in einem Punkte ξ_1 derart treffen, dass die Harmonität stattfindet:

$$(\bar{X}_1 \bar{X}_1', \xi_1 \bar{O}_1) = -1.$$

Diese harmonische Eigenschaft wird bei der quadratischen Transformation in das Curvensystem nicht gestört, weshalb man den Satz geben kann: „Zwei

beliebige Punkte $X_1 X_1'$ der Plancurve C_6^4, welche auf einem Strahle des Inflexionsknotens O_1 liegen, werden durch den letztern und die ihm gegenüberliegende Doppelpunktsdreiecksseite o_1 harmonisch getrennt."

Aus dem vorstehenden Satze sowie auch in Folge der angedeuteten harmonischen Beziehungen, welche im Grundkegelschnitte k vorkommen, fliesst der weitere Satz: „Die Tangenten in zwei $X_1 X_1'$-Punkten, welche auf einem Strahle des Inflexionsknotens O_1 einer Plancurve C_6^4 liegen, schneiden sich gemeinschaftlich auf der gegenüberliegenden Doppelpunktslinie $O_2 O_3 \equiv o_1$."

136. Die Frage nach den Doppeltangenten $\varDelta$ wird sich durch die folgende Betrachtung erledigen. Gehen wir beispielsweise von dem Falle aus, wo sämmtliche $\overline{V}$-Elemente des Hauptdreiecks $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ reell vorhanden sind, so werden die vier p-Sehnen nach dem Constructionsschema in (82) gefunden. Von diesen p-Sehnen ergeben sich nun zwei $p_2 p_3$ als solche mit eigentlichen $\overline{B}$-Punkten, u. z. sind es diejenigen, welche sich in dem einen der beiden ζ_1-Punkte der Hauptlinie $\overline{o}_1$ gemeinsam begegnen, während die beiden Sehnenlinien $p_1 p_4$ den Grundkegelschnitt k nicht in reellen $\overline{B}$-Punkten treffen.

Da wir den Hauptpunkt $\overline{O}_1 \equiv O_2$ als Pol für die Gerade $\overline{o}_1$ voraussetzten, weil der homologe Doppelpunkt $O_1 \equiv O_2$ ein Inflexionsknoten sein soll, so er-

gibt sich aus der involutorischen Beziehung, dass die Endpunkte $B_2\overline{B}_2'$, $\overline{B}_3\overline{B}_3'$ der Sehnen $p_2 p_3$ in den Paaren $\overline{B}_2\overline{B}_3'$, $\overline{B}_3\overline{B}_2'$ auf Strahlen des Büschels $\overline{O}_1 \equiv O_2$ liegen, was sagen will: die Elemente eines solchen Paares werden durch den Hauptpunkt $\overline{O}_1$ und durch die Hauptlinie $\bar{o}_1$ harmonisch geschieden. Die unmittelbare Folgerung aus dieser Wahrheit spricht für die Plancurve C_6^4 mit dem Inflexionsknoten O_1 den Satz aus:

„Eine C_6^4 mit einem Inflexionsknoten O_1 besitzt nur zwei Doppeltangenten $\varDelta$ mit reellen Berührpunkten B, welche sich in einem Punkte der gegenüberliegenden Seite o_1 des Doppelpunktendreiecks $O_1 O_2 O_3$ schneiden. Jene Berührpunkte B paaren sich zweimal in der Weise, dass sie jedesmal auf einem Strahle des Inflexionsknotens O_1 liegen, der sie von der Doppelpunktslinie $o_1 \equiv | O_2 O_3$ harmonisch trennt; oder sie paaren sich derart, dass ihre Verbindungslinien sich in einem Punkte der Geraden o_1 schneiden, welcher harmonisch conjugirt dem auf o_1 befindlichen Schnitte der beiden reellen Doppeltangenten in Bezug des Doppelpunktenpaares $O_2 O_3$ ist."

§ 16. Realität der Doppeltangenten und Bestimmungsbedingungen.

137. Sind alle drei Doppelpunkte $O_1 O_2 O_3$ der Plancurve C_6^4 Inflexionsknoten, so muss der eine ein

isolirter Punkt der Curve sein, dessen homologer also im Systeme des Bildkegelschnitts k innerhalb dieses letzteren liegen wird, und das Hauptdreieck $\overline{O_1}\,\overline{O_2}\,\overline{O_3}$ wird in Bezug des Kegelschnitts k ein „selbst conjugirtes“ d. h. dessen Ecken und deren gegenüberstehende Seiten werden in polarer Beziehung sein. In diesem Falle gibt es nur imaginäre p-Sehnen des Grundkegelschnitts, weil nur ein einziges Paar reeller conjugirter ζ-Punkte vorkommt, wie man sich leicht aus der Construction in (82) oder in (83) überzeugen kann. Aus diesem Grunde werden zwar die Beziehungen, welche wir vorher für die harmonischen Eigenschaften eines Inflexionsknotens überhaupt gesehen haben, feststehend bleiben, aber man wird sagen müssen:

„Eine C_6^4 mit drei Inflexionsknoten enthält keine eigentlichen Doppeltangenten.“

138. Ist eine Plancurve C_6^4 mit einem Inflexionsknoten in O_1 gegeben, so wissen wir aus (135), dass jeder Strahl von O_1 zwei Punkte $X_1 X_1'$ der Curve enthält, welche in Bezug O_1 und der Doppelpunktslinie $o_1 \equiv | O_2 O_3 |$ harmonisch gelegen sind. Ist also ein solcher X_1-Punkt bekannt, so kennt man auch den ihm conjugirten, wodurch mit seiner Angabe von vorne herein eigentlich zwei Angabebedingungen der Curve verbunden sind. Weil nun (65) eine Curve 4ter Ordnung vierzehn Bedingungen zu ihrer Bestimmung bedarf, so wird man bei Angabe der drei Hauptpunkte, deren einer ein Inflexionsknoten ist, bemerken können: „dass

eine C_6^4 mit einem Inflexionsknoten durch Bekanntgabe der drei Doppelpunkte und nur drei Curvenpunkte ausreichend bestimmt erscheint." Denn die Doppelpunkte umfassen an und für sich neun Angabeelemente; da nun jedem der drei X_1-Punkte noch ein zweiter X_1'-Punkt harmonisch zukommt, so erhalten wir eigentlich schon eine Ueberbestimmung von sechs Angabeelementen.

Für den Fall, wo sämmtliche Doppelpunkte einer C_6^4 Inflexionsknoten werden, wird die zur Bestimmung der Curve nothwendige Angabebedingung ausser den drei Inflexionsknoten offenbar durch die Bekanntgabe von nur zwei Curvenpunkten X mehr als ausreichen, weil ein solcher X-Punkt für jeden der drei Knoten noch einen harmonisch conjugirten zu der dem betreffenden Knoten gegenüberliegenden Seite des Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ bedingt. Es lässt sich demnach behaupten: „eine C_6^4 mit drei Inflexionsknoten, welche bekannt sind, ist durch zwei ihrer Punkte vollkommen bestimmt."

Sechster Abschnitt.

Polar-reciproke Beziehung.

§ 17. Die Enveloppe 4ter Classe und der Ort 4ter Ordnung.

139. Es wurde in (49) auf eine Art Steiner'scher Verwandtschaft in der Ebene hingewiesen, welche derjenigen in unseren bis jetzt geführten Untersuchungen

der Eigenschaften ebener Curven 4ter Ordnung benützten quadratischen Verwandtschaftsart in vieler Beziehung dualistisch entgegensteht. Wir wollen uns nun damit etwas eingehender befassen, um mit Hilfe jener Beziehung wenigstens die allgemeinsten Haupteigenschaften der Plancurven 4ter Ordnung nochmals ins Auge zu fassen und zur Wiederholung zu bringen. Eigentlich verlangt die Natur der Sache nunmehr die aus der quadratischen Abbildung eines Kegelschnitts hervorgehende Resultatscurve als eine „Enveloppe“ und nicht, wie in dem früheren Falle, als „Punktenort“. Dieses hat demnach zur Folge, dass wir die erhaltenen Curvenresultate jetzt im Allgemeinen nicht höher, denn von der „4ten Classe“ annehmen können, wie im Folgenden gezeigt ist.

140. Ein in der Ebene beliebig gewähltes Dreieck $O_1 O_2 O_3$ (Fig. 20) fixirt die quadratische Beziehung in dieser Ebene als das Hauptdreiseit $o_1 o_2 o_3$, indem wir die den Ecken $O_1 O_2 O_3$ gegenüberliegenden Seiten dieses Dreiecks mit dem gleichen kleinen Buchstaben und demselben Index bezeichnen. Die Ecken des Dreiecks sind Hauptpunkte und dessen Seiten die Hauptlinien. Eine beliebige Gerade eines Hauptpunktes werden wir wie bisher einen „Hauptstrahl“ nennen. Wir wissen aber aus (49), dass einer beliebigen Geraden, sofern sie als Strahl betrachtet ist, ein Punkt entspricht, dass hingegen dieser Geraden, als Punktenträger betrachtet, ein Kegelschnitt bildlich entspricht,

welcher die Hauptlinien $o_1 o_2 o_3$ als Tangenten besitzt und dass sich also insbesondere auch die ∞ ferne

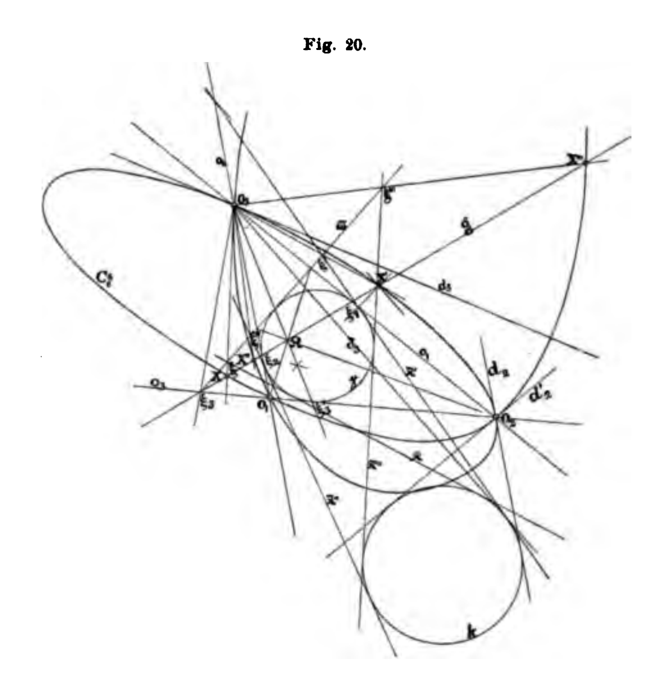


Fig. 20.

Gerade als ein Kegelschnitt abbildet, der, wie leicht einzusehen ist, eine Hyperbel sein muss, von welcher die Asymptoten ein Paar der Hauptlinien sind, indem gleichzeitig die dritte Hauptlinie als Tangente dieser Hyperbel angehört. Es sei dieser Kegelschnitt die Haupthyperbel genannt. Jeder Tangente derselben entspricht somit ein ∞ entfernter Punkt und umgekehrt. Wir ersehen daraus, dass die Asymptoten der Haupthyperbel eine ausgezeichnete Rolle spielen, sofern sie als Hauptlinien in Betracht gezogen werden, dass also die Hauptlinien des Dreiseits $o_1 o_2 o_3$ und folglich auch die Hauptpunkte $O_1 O_2 O_3$ in der gegenwärtigen

Beziehung nicht mehr die untereinander identisch gleiche Bedeutung haben, wie solches in dem früheren Verwandtschaftsfalle von den Hauptpunkten vorausgesetzt werden durfte.

141. Um den Bedingungen im vorigen Artikel gerecht zu werden, weisen wir in den folgenden Ableitungen den beiden Hauptlinien $o_1 o_2$ die Bedeutung als Asymptoten der Haupthyperbel zu, wofern dann der Hauptpunkt O_3 Mittelpunkt dieses Kegelschnitts ist und das Hauptpunktenpaar $O_1 O_2$ in besonderer Eigenschaft als Doppelpunkte einer auf der Hauptlinie o_3 fixirten quadratischen Involution anzusehen ist.

Die ∞ ferne Gerade trifft ihr Abbild: die Haupthyperbel, in den Berührpunkten der Hauptlinien $o_1 o_2$, was sofort eingesehen wird. Daraus kann gefolgert werden, dass das Bild eines beliebigen geraden Punktenträgers ein Kegelschnitt sein wird, der das Hauptlinienpaar $o_1 o_2$ in den Schnittpunkten dieses Trägers tangirt. Unter einem bemerken wir aber, dass die Haupthyperbel die Hauptlinie o_3 in einem Punkte berührt, welcher offenbar dem Schnittpunkte, den die ∞ ferne Gerade auf der o_3 erzeugt, in der auf ihr befindlichen, durch das Paar $O_1 O_2$ hervorgerufenen Involution conjugirt ist, dass somit dieser Berührungspunkt, wie eingesehen wird, der Centralpunkt jener Involution ist. Hieraus schliessen wir wieder, dass auch das Kegelschnittsbild einer beliebigen Geraden der Ebene die Hauptlinie o_3 in jenem Punkte tangirt,

welcher in der erklärten Involution auf o_3 dem Schnitte dieser Geraden conjugirt ist.

Die durch das Hauptlinienpaar $o_1 o_2$ a priori als hyperbolisch fixirte Strahleninvolution im Hauptpunkte O_3, sowie die mit ihr perspectivisch auf der Hauptlinie o_3 befindliche, durch das Hauptpunktenpaar $O_1 O_2$ hervorgerufene Punkteninvolution, die selbstverständlich auch immer hyperbolisch ist (sofern die Punkte $O_1 O_2$ reelle Elemente sind), seien die Fundamentalinvolutionen genannt.

142. Wenn man in der Ebene ein Strahlenbüschel annimmt, so ist nach dem Vorstehenden klar, dass jedem Elemente desselben, sofern man es als den Träger einer Punktenreihe ansieht, bildlich ein Kegelschnitt entspricht, welcher dem Hauptdreiseit $o_1 o_2 o_3$ eingeschrieben ist. Dem Centrum des Büschels, als einfachem Punktenelemente, entspricht aber, wie oben gesagt wurde, eine Gerade, welche ersichtlich eine Tangente des betreffenden Kegelschnitts ist. Somit ergibt sich als Abbild des vorgelegten Strahlenbüschels eine Kegelschnittsschaar, die das Bild des Mittelpunktes im Büschel sowie die Hauptlinien $o_1 o_2 o_3$ zu gemeinschaftlichen Grundlinien (49) besitzt.

143. Es entsteht nun die Frage: was ist das Bild eines Hauptstrahles? Die Antwort darauf ist folgendermassen zu geben. Wenn dieser Strahl als Element des betreffenden Hauptbüschels betrachtet

wird, dann entspricht ihm bekanntlich als Bild ein Punkt und dieser ist offenbar der Hauptpunkt, durch welchen der Strahl zieht, selbst. Wenn aber der Strahl als Träger einer Punktenreihe 1ten Grades angesehen wird, so muss ihm nach den Gesetzen der quadratischen Verwandtschaft im Allgemeinen ein Gebilde 2ten Grades entsprechen, wie oben behauptet wurde, ein Kegelschnitt, d. h. die Bilder der Elemente der Punktenreihe auf dem Strahle sind Tangenten dieses Kegelschnitts und bilden ein Tangentenbüschel. In diesem Büschel sind die Hauptlinien $o_1 o_2 o_3$ als Elemente vertreten und nach (141) sind die Schnittpunkte des gegebenen Strahles mit dem Hauptlinienpaare $o_1 o_2$ sowie der dem Schnitte des Strahles auf der Hauptlinie o_3 conjugirte Punkt die Berührpunkte des Kegelschnitts dieser Hauptlinien. Da nun zwei der Berührpunkte in dem gegebenen Falle mit dem Hauptpunkte, durch welchen der Strahl zieht, in Coincidenz gelangen, so ist einzusehen, dass das Tangentenbüschel des Bildkegelschnitts in ein Strahlenbüschel degenerirt, dessen Mittelpunkt offenbar der Schnitt des Strahles mit der dem Hauptpunkte gegenüberliegenden Hauptlinie ist. Diese Lösung hat wohlgemerkt nur Giltigkeit für einen Strahl der Hauptbüschel $O_1 O_2$.

Ist ein Strahl des Büschels O_3 Punktenträger, dann modificirt sich das vorstehende Resultat dahin, dass das Strahlenbüschelbild seinen Mittelpunkt in dem Punkte hat, welcher in der Fundamental-Involution

(141) auf der Hauptlinie o_3 dem Schnitte des gegebenen Strahles daselbst conjugirt ist.

144. Wir haben soeben gesehen, dass einem Hauptstrahle sein eigener Hauptpunkt entspricht. In Umkehrung dessen entspricht aber jedem Hauptpunkte sein Hauptstrahlenbüschel, was leicht eingesehen wird, und es ist zu bemerken, dass diesfalls die Beziehung eine perspectivische ist. Ueberdies erkennt man, dass das Hauptlinienpaar, das in einem Hauptpunkte zusammentrifft, diesem entspricht, sofern eine Hauptlinie als Strahlenelement aufgefasst wird, dass sie sich aber selbst entspricht, sobald man sie als Punktenträger ansieht, so dass also allen Punkten einer Hauptlinie $o_1 o_2$ diese selbst perspectivisch entsprechend ist.

145. Die bisher gepflogenen Kriterien der quadratischen Beziehung vorliegender Art gestatten nunmehr ohne Schwierigkeit, den einem beliebigen Punkte der Ebene entsprechenden Bildstrahl, und in Umkehrung dessen, den einem beliebigen Strahle in der Ebene entsprechenden Bildpunkt zu ermitteln:

„Verbindet man einen beliebigen Punkt X durch Hauptstrahlen, so treffen diese die Hauptlinien $o_1 o_2 o_3$ in dem Punktentripel $\xi_1 \xi_2 \xi_3$. Die Verbindungslinie $|\xi_1 \xi_2|$ ist das Bild $\bar{x}$ des gegebenen Punktes.“

Die Punkte $O_1 O_2 O_3 X$ sind die Ecken eines voll-

ständigen Vierecks, dessen Diagonaldreieck $\xi_1\xi_2\xi_3$ ist. Die Gerade $|\xi_1\xi_2| = \bar{x}$ trifft die Hauptlinie o_3 in einem Punkte ξ_3', welcher der in der Involution auf o_3 zu ξ_3 conjugirte Punkt (141) ist.

Führen wir die Construction in umgekehrter Weise durch, so folgert der Punkt X als das Bild der Geraden $\bar{x}$.

146. Nimmt man in der Ebene des Hauptdreiseits $o_1o_2o_3$ einen beliebigen Punkt S als den Träger eines Strahlenbüschels an, so frägt es sich um das Bild dieses Elementargebildes. Man kann sofort entscheiden, dass das fragliche Bild dem Gesetze der quadratischen Beziehung gemäss ein Kegelschnitt σ sein muss. Dieser Kegelschnitt kann nach dem Constructionsgesetze in (145) als geometrischer Ort erzeugt werden, dessen Punktenelemente die Bilder der Strahlenelemente des Büschels sind. Bedenkt man, dass (144) jenen Strahlen des Büschels S, welche durch die Hauptpunkte ziehen, diese letztern selbst entsprechen, so ergibt sich, dass der Kegelschnitt σ dem Dreiecke $O_1O_2O_3$ umschrieben ist.

Es ist übrigens klar, dass durch die Construction (145) der einzelnen Punkte des Kegelschnitts σ in den beiden Punkten O_1O_2 zwei ein-eindeutige, also projectivische Strahlenbüschel entstehen, welche den Kegelschnitt σ erzeugen, und man sieht auch sofort ein, dass jene Elemente in diesen Büscheln, welche als Hauptstrahlen durch den Mittelpunkt S ziehen,

gleichzeitig die Tangenten in den betreffenden Hauptpunkten $O_1 O_2$ an den Kegelschnitt sind. Gleichfalls und mit Rücksicht auf die involutorische Beziehung, welche in dem Hauptpunkte O_3 statthat, finden wir die Kegelschnittstangente dieses Punktes als den dem Hauptstrahle $|SO_3|$ in der Involution O_3 conjugirten Strahl.

Das eben erhaltene Resultat zeigt: Jedem Punkte der Ebene als Träger eines Strahlenbüschels entspricht bildlich ein Kegelschnitt; alle diese Kegelschnitte bilden ein Netz mit den drei Grundpunkten $O_1 O_2 O_3$.

147. Ist in der Ebene eine Gerade x angenommen, die den Träger einer Punktenreihe bildet, so entspricht jedem Punkte dieser Reihe, sofern man ihn als den Träger eines Strahlenbüschels betrachtet, nach dem Vorigen ein Kegelschnitt, der dem Dreiecke $O_1 O_2 O_3$ umschrieben ist. Die gesammten derart entstehenden Kegelschnitte stellen ein Kegelschnittsbüschel vor, dessen Grundpunkte $O_1 O_2 O_3 \overline{X}$ sind, wenn man $\overline{X}$ als das entsprechende Bild der Geraden x, als Strahl, ansieht.

Fällt die Gerade x mit einer Hauptlinie zusammen, so wissen wir aus (143), dass jedem Punkte dieser Hauptlinie, wenn man ihn als Träger eines Strahlenbüschels betrachtet, ein Strahl des ihr gegenüberliegenden Hauptpunktes entspricht. Demnach zerfällt diesfalls das Kegelschnittsbüschel in das dem gegenüberliegenden Hauptpunkte zugehörige Hauptstrahlen-

büschel, woraus der Satz folgt: Die Punkte einer Hauptlinie sind entsprechend den Geraden, die durch den gegenüberliegenden Hauptpunkt ziehen.

148. Die quadratische Verwandtschaft in der Ebene fordert, dass einem Gebilde n^{ter} Ordnung oder n^{ter} Classe im Allgemeinen ein solches $2n^{ter}$ Ordnung oder $2n^{ter}$ Classe entspricht. Demzufolge ist das Bild eines Kegelschnitts im Allgemeinen eine Curve 4ter Ordnung oder 4ter Classe. Wird also in der Ebene des Hauptdreiseits $o_1 o_2 o_3$ ein beliebiger „Grundkegelschnitt" festgelegt, so wird sein Bild eine ebene Curve 4ter Ordnung oder 4ter Classe sein müssen. Diese Curve kann man als Enveloppe oder als Ort erzeugen, wenn man das Constructionsgesetz (145) anwendet. Allein man darf dabei nicht ausser Acht lassen, dass dieses Gesetz eine doppeldeutige Beziehung ausdrückt, dass also dasselbe in seiner Anwendung nicht eine und dieselbe Curve involvirt.

149. Projiciren wir nämlich nach (145) die einzelnen $\overline{X}$-Punkte eines angenommenen Grundkegelschnitts k durch Hauptstrahlen der Punkte $O_1 O_2 O_3$, so erhalten wir ein System von x-Geraden, welche die Bilder dieser Kegelschnittspunkte sind. In dem Systeme der x-Geraden spielen die Hauptlinien $o_1 o_2 o_3$ eine singuläre Rolle. Erinnern wir uns der Beziehung (144), so sehen wir, dass einem Punkte, welchen der Grundkegelschnitt mit einer Hauptlinie gemein

hat, diese selbst als x-Gerade entspricht und weil diese Gemeinschaftlichkeit jedesmal paarweise (reell oder imaginär) eintrifft, so erkennen wir die Hauptlinien $o_1 o_2 o_3$ als Doppelelemente des x-Geradensystems, dessen Enveloppe eine Curve 4ter Classe ist.

Diese Plancurve besitzt also die Hauptlinien $o_1 o_2 o_3$ als Doppeltangenten und es sind die Berührungspunkte des Hauptlinienpaares $o_1 o_2$ sofort die Schnittpunktenpaare derselben mit dem Grundkegelschnitte, während auf der Hauptlinie o_3 diese Berührpunkte die harmonisch conjugirten der Kegelschnittspunkte in Bezug der auf ihr befindlichen Involution (141) sind. Da diese Curve keine Inflexionstangenten besitzt, so bestimmt sich mit Berücksichtigung ihrer drei Doppeltangenten die Ordnung derselben nach der Formel in (8) rechts für $n = 4$ und $t = 3$: $4(4-1) - 2 \cdot 3 = 6$. Symbol: C_4^6.

150. Wenn man hingegen die Construction in (145) polarisirt (Fig. 20.), so entspricht jeder Tangente $\bar{x}$ des Grundkegelschnitts ein bestimmter Punkt X. Der geometrische Ort dieses X-Punktensystems ist aber eine (von der vorigen verschiedene) Plancurve 4ter Ordnung. Dieselbe enthält die Hauptpunkte $O_1 O_2 O_3$ als Doppelpunkte vermöge der Beziehung in (143), wornach den Hauptstrahlen der betreffende Hauptpunkt entspricht. Weil nun durch jeden Hauptpunkt die Tangenten an den Grundkegelschnitt paarweise ziehen, so muss dieser ein Doppelelement der Curve

sein. Zugleich erkennen wir (wegen der perspectivischen Beziehung dieser Geraden und der ihnen bildlich angehörigen Punktelemente) diese Kegelschnittstangentenpaare in den Hauptpunkten $O_1 O_2$ als Tangentenelemente der Plancurve in diesen Punkten, d. h. als Doppelpunktstangenten. Für den Doppelpunkt O_3 sind die beiden ihm angehörigen Tangenten diejenigen Geraden $d_3 d_3'$, welche zu den aus ihm gehenden Kegelschnittstangenten $\delta_3 \delta_3'$ in der Fundamentalinvolution O_3 (141) die harmonisch conjugirten Strahlen sind. Mit Rücksicht darauf, dass diese Plancurve im Allgemeinen ohne Rückkehrpunkte ist und drei Doppelpunkte besitzt, erhalten wir für $n = 4$ und $d = 3$ nach der Formel (8) links die Classenzahl: $4(4-1) - 2 \cdot 3 = 6$ und constatiren dieselbe als Unicursalcurve mit dem Symbole: C_6^4.

151. Betrachtet man die Construction in (149), so trifft jeder Strahl, der z. B. den Hauptpunkt O_1 mit einem $\overline{X}$-Punkte, dessen Bild eine x-Gerade ist, verbindet, den Grundkegelschnitt noch in einem zweiten Punkte $\overline{X}_1$, dem eine x_1-Gerade bildlich entspricht. Das Geradenpaar $x x_1$ hat einen Punkt ξ_1 auf der Hauptlinie o_1 gemeinschaftlich und wir sehen, dass die Punktenreihe auf o_1 in Bezug der x-Strahlen zweideutig ist, indem von jedem Elemente ξ_1 derselben zwei Elemente $x x_1$ ziehen. Die gleiche Beziehung erkennt man auf der Hauptlinie o_2. In dem gemeinsamen Hauptpunkte O_3 der beiden zwei-zweideutigen

Reihen ist offenbar ein zweifaches Element vertreten, so dass dem Punkte O_3 als Element der o_1 die Coincidenzgerade $xx_1 \equiv o_2$ und als Element von o_2 die Gerade o_1 entspricht. Gleichzeitig ist das Paar $O_1 O_2$ als (32) das Reductionspunktenpaar zu erkennen, so dass wir also sagen können: „Die Plancurve C_4^6 in (149) ist das Erzeugniss der beiden reductionsfähigen 2ter Ordnung, in nicht reducirter Lage befindlichen zwei-zweideutigen Punktenreihen $\xi_1 \xi_2$ auf den Hauptlinien $o_1 o_2$, welche die Reihenträger $o_1 o_2$ sowie die Verbindungslinie o_3 des Reductionspunktenpaares $O_1 O_2$, somit die drei Seiten des Hauptdreiecks, als Doppeltangenten besitzt.“

Zugleich erkennen wir am Grundkegelschnitte in den Hauptpunkten $O_1 O_2$ zwei projectivische Strahleninvolutionen (33), in deren gemeinschaftlichem Strahle o_3 ein Paar Doppelstrahlen coincidiren. Das Erzeugniss dieser beiden Involutionen ist der Grundkegelschnitt als Bild der Plancurve C_4^6.

152. Für die Construction der Plancurve C_6^4 in (150) lässt sich Folgendes bemerken. Jede Tangente $\bar{x}$ des Grundkegelschnitts k trifft das Hauptlinienpaar $o_1 o_2$ in den beiden $\xi_1 \xi_2$-Punkten (151). Der den Geraden $\bar{x}$ entsprechende Bildpunkt X ergibt sich als Schnitt der Strahlen $|O_1 \xi_1|$, $|O_2 \xi_2|$. Behält man etwa den Strahl $|O_1 \xi_1|$ im Auge, so ist offenbar von dem Punkte ξ_1 noch eine zweite Tangente $\bar{x}'$ an den Grundkegel-

schnitt möglich, welche die Hauptlinie o_2 in einem ξ_2' Punkte trifft. In diesem letztern Punkte zieht aber ein zweiter Strahl des Hauptpunktes O_2, welcher Strahl auf dem Hauptstrahl $| O_1 \xi_1 |$ noch einen zweiten Curvenpunkt X' herausschneidet. Auf diese Weise entsprechen also dem Hauptstrahle in O_1 zwei Strahlenelemente in O_2 und da diese Beziehung, wie leicht zu begreifen ist, auch umgekehrt stattfindet, so erkennt man in den Hauptpunkten $O_1 O_2$ zwei doppeldeutige Strahlenbüschel. Es ist aber auch einzusehen, dass in dem gemeinsamen Strahle dieser beiden Büschel, der Hauptlinie o_3, sich zwei Strahlen derselben vereinigen, deren Reductionsstrahlenpaar, die Hauptlinien $o_1 o_2$, den Doppelpunkt O_3 erzeugen (32). Daraus ergibt sich also die Beziehung folgendermaassen: „Die Plancurve C_6^4 in (150) ist das Erzeugniss der beiden reductionsfähigen 2ter Ordnung, in nicht reducirter Lage befindlichen, zwei-zweideutigen Strahlenbüschel in den Hauptpunkten $O_1 O_2$ welche die Büschelträger $O_1 O_2$ sowie den Schnittpunkt O_3 des Reductionsstrahlenpaares $o_1 o_2$ als Doppelpunkte besitzt.“

Im Systeme Σ des Grundkegelschnitts k gestaltet sich die Situation nach (33) derart, dass die Hauptlinien $o_1 o_2$ die Träger von zwei projectivischen Punkteninvolutionen sind, in deren gemeinschaftlichem Punkte O_3 ein Paar Doppelelemente dieser Involutionen coincidiren. Der Grundkegelschnitt k, als Bild der Plancurve C_6^4, ist das Erzeugniss jener beiden Involutionen. (Figur 20.)

153. Von den beiden Erzeugnissen in (151) und (152) ist insbesondere die unicursale Plancurve C_6^4, als von der 4[ten] Ordnung, für die Zwecke dieses Lehrganges von Interesse, aber auch nur insofern, als wir mit Hilfe der polar-reciproken Beziehung in der Steiner'schen Verwandtschaft derselben mit einem Kegelschnitte, auf welchem sie abgebildet wird, zu denselben Eigenschaften und den gleichen Resultaten gelangen, wie solche die vorhergegangenen Untersuchungen nachgewiesen haben. Wir werden uns also auch nur mit dem Hauptsächlichsten befassen, wozu wir aber gewissermaassen durch den eigenthümlichen Reiz des Dualismus, der in der polar gegenüberstehenden Beziehung mit seiner gesetzmässigen Construction zum Ausdruck gelangt, genügende Anregung zum Forschen finden.

§ 18. Die Sekante.

154. Eine beliebige Gerade g der Ebene (Fig. 20.) schneidet, wie bekannt, die Curve C_6^4 in einem Punktenquadrupel. Das Bild der Geraden ist ein Kegelschnitt γ, welcher dem Hauptdreiseite $o_1 o_2 o_3$ eingeschrieben ist und dessen vier mit dem Grundkegelschnitt k gemeinschaftliche Tangenten $\bar{x}$ die Bilder des Punktenquadrupels vorstellen. Der Kegelschnitt γ wird als Enveloppe seiner Tangenten erhalten, welche Tangenten nach der Grundconstruktion (145) resultiren, sofern man die g-Sekante als Punktenreihe in Betracht zieht. Diese g-Sekante trifft die Seiten $o_1 o_2 o_3$ des Haupt-

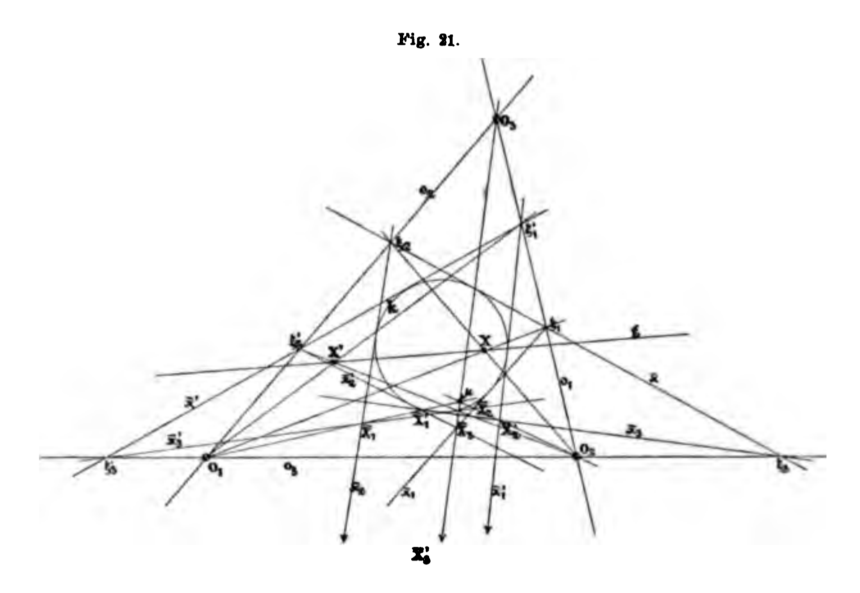
dreiecks in den bezüglichen Punkten $\xi_1\xi_2\xi_3$, und wenn man zu dem ξ_3-Punkte auf o_3 den harmonisch conjugirten Punkte ξ_3' in der Fundamentalinvolution (141) aufsucht, so bildet das Tripel $\xi_1\xi_2\xi_3'$ die Elemente der Berührung des Kegelschnitts γ mit den Seiten des Hauptdreiseits $o_1o_2o_3$. Ist also der Kegelschnitt γ fixirt, so kann man, wie gesagt, mittelst der zwischen ihm und dem Grundkegelschnitte k gemeinschaftlichen Tangenten $\bar{x}\bar{x}'\bar{x}''\bar{x}'''$ die Sekantenpunkte $XX'X''X'''$ der g-Geraden auf der Curve C_6^4 durch die Grundconstruction (141) bestimmen. Noch einfacher erfolgt diese Bestimmung folgend.

Der Punkt ξ_3 ist das Centrum einer Strahlenharmonität, in welcher die Verbindungslinie $O_3\xi_3$ und die Gerade g conjugirte Elemente sind. Wir suchen in dieser Harmonität zur Geraden o_3 den zugeordneten Strahl $\bar{\omega}$, welcher wie o_3 eine Tangente des Kegelschnitts γ ist. (Die Figur 20. zeigt die Einfachheit der bezüglichen Construction mittelst des Poles Ω von $O_3\xi_3$.) Das Tangentenquadrupel $\bar{x}\bar{x}'\bar{x}''\bar{x}'''$ trifft die Gerade $\bar{\omega}$ in dem Punktenquadrupel $\xi\xi'\xi''\xi'''$, dessen Projectionen aus dem Hauptpunkte O_3 direct das gesuchte Sekantenquadrupel $XX'X''X'''$ auf g angeben.

Wenn man zwei Punkte XX' des Quadrupels einer Geraden g kennt, so lässt sich die Ermittelung der beiden andern Punkte $X''X'''$ linear auf folgendem Wege bewerkstelligen. Wir brauchen nur die Construction in (61) zu polarisiren, so ergibt sich (Fig. 21.):

Die Bilder $\bar{x}\bar{x}'$ des Punktenpaares XX' sind Tangenten an den Grundkegelschnitt k und werden nach

Fig. 21.



der Construction in (145) erhalten. Die Tangenten $\bar{x}\bar{x}'$ haben mit den Hauptlinien $o_1 o_2 o_3$ die Punktentripel $\xi_1 \xi_2 \xi_3$, $\xi_1' \xi_2' \xi_3'$ gemein. Aus jedem Punkte dieser beiden Tripel zieht je eine zweite Tangente an den Grundkegelschnitt, die wir entsprechend bezeichnen: $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, $\bar{x}_1' \bar{x}_2' \bar{x}_3'$. Nun fixiren wir der projectivischen Beziehung in (61) gemäss polar-reciprok die Schnitte:

$$(\bar{x}_1 \bar{x}_2') = \bar{X}_3; \quad (\bar{x}_2 \bar{x}_1') = \bar{X}_3'$$
$$(\bar{x}_1 \bar{x}_3') = \bar{X}_2; \quad (\bar{x}_3 \bar{x}_1') = \bar{X}_2'$$
$$(\bar{x}_2 \bar{x}_3') = \bar{X}_1; \quad (\bar{x}_3 \bar{x}_2') = \bar{X}_1'.$$

Die Verbindungslinien $\bar{X}_3 \bar{X}_3'$, $\bar{X}_2 \bar{X}_2'$, $\bar{X}_1 \bar{X}_1'$ gehen durch die gleichindextirten Hauptpunkte $O_3 O_2 O_1$ und treffen sich gemeinsam in einem Punkte μ, welcher

das Centrum der drei perspectivischen Dreiecke $\overline{X}_1 \overline{X}_2 \overline{X}_3$, $\overline{X}_1' \overline{X}_2' \overline{X}_3'$, $O_1 O_2 O_3$ ist. Von dem Punkte μ gehen an den Grundkegelschnitt zwei Tangenten $\overline{x}'' \overline{x}'''$, welche mit dem Paare $\overline{x} \overline{x}'$ jene vier Tangenten bilden, die der Bildkegelschnitt γ mit dem Grundkegelschnitt k gemeinschaftlich hat. Die Bilder $X'' X'''$ des Tangentenpaares $\overline{x}'' \overline{x}'''$ sind die Ergänzungselemente des Quadrupels $X X' X'' X'''$ der Sekante g auf der Plancurve C_6^4. (In unserer Figur sind die Tangenten $\overline{x}'' \overline{x}'''$ imaginär, weil μ innerhalb des Kegelschnitts k fällt, weshalb die g-Sekante die Curve nur in dem reellen Punktenpaare $X X'$ schneidet.)

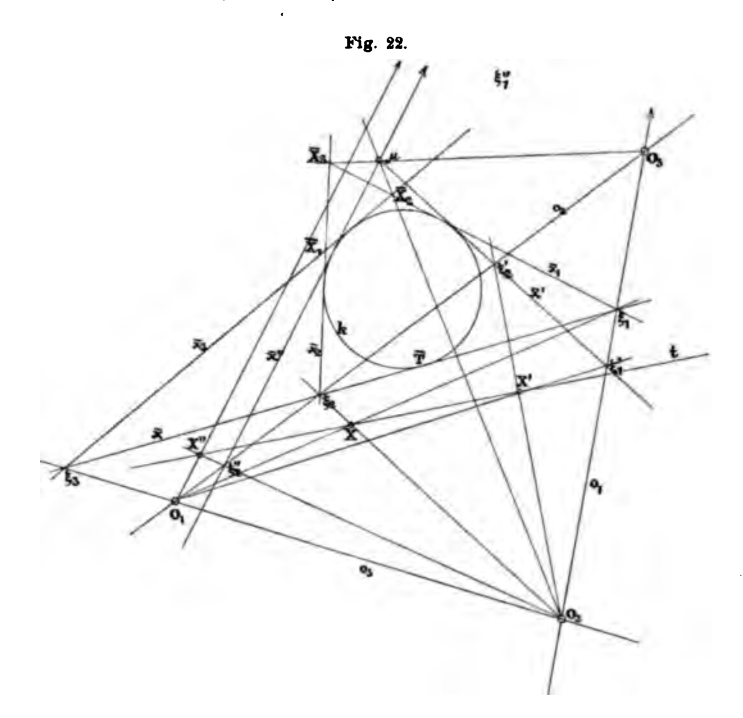
155. Wenn die Sekante die ∞ ferne Gerade der Ebene ist, so sind die Elemente des Schnittquadrupels Asymptotenpunkte der Plancurve. Es ist leicht einzusehen, dass die Bilder dieser Asymptotenpunkte nichts anderes sind, als die vier gemeinschaftlichen Tangenten zwischen dem Grundkegelschnitt und der Haupthyperbel (140). Da aber zwei Kegelschnitte vier gemeinschaftliche Tangenten besitzen, so finden wir das Gesetz (76) bestätigt, nach welchem eine Curve 4[ter] Ordnung höchstenfalls vier Asymptotenelemente enthält, welche paarweise auch imaginär sein können, je nachdem die gemeinschaftlichen Tangenten zwischen dem Grundkegelschnitte und der Haupthyperbel bekanntlich selber in Paaren reell oder imaginär ausfallen. Dabei haben wir auch den Fall der gegenseitigen Berührung dieser zwei Kegelschnitte

miteingeschlossen, indem ein Paar gemeinschaftliche Tangenten in Coincidenz gerathen können, was für die Curve immer den in (77) bezeichneten parabolischen Fall bedingt.

§ 19. **Die einfache Tangente.**

156. Das Bild einer in einem Punkte X der Plancurve C_6^4 (Fig. 22.) gehenden Tangente t, als

Fig. 22.



Punktenträger, ist, der quadratischen Beziehung gemäss, ein dem Hauptdreiseite $o_1 o_2 o_3$ eingeschriebener Kegelschnitt τ, welcher den Grundkegelschnitt k in einem Punkte $\overline{T}$ einfach berührt. Dieser Berührungspunkt $\overline{T}$ ist offenbar das Bild der Tangente t, wenn

wir dieselbe als Strahl auffassen; die gemeinschaftliche Berührungstangente $\overline{x}$ im Punkte $\overline{T}$ ist aber wieder das Bild des Berührungspunktes X auf der Plancurve.

Der Grundkegelschnitt k besitzt mit dem Bildkegelschnitte τ ausser der Berührungstangente x noch zwei gemeinschaftliche Tangenten $\overline{x}'\overline{x}''$, und diese sind die Bilder der beiden Tangentialpunkte $X'X''$ der Curventangente t (68). Um die Tangentialpunkte $X'X''$ linear zu ermitteln, werden wir die Construction in (69) polarisiren. Darnach trifft das Bild $\overline{x}$ die Hauptlinien $o_1 o_2 o_3$ in dem Punktentripel $\xi_1 \xi_2 \xi_3$; von jedem Elemente desselben zieht an den Grundkegelschnitt k noch eine der Tangenten $\overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$ und es ergeben sich gemäss der stattfindenden Projectivität die Schnitte:

$$(\overline{x}_1 \overline{x}_2) = \overline{X}_3; \quad (\overline{x}_1 \overline{x}_3) = \overline{X}_2; \quad (x_2 \overline{x}_3) = \overline{X}_1.$$

Das auf diese Weise dem Grundkegelschnitte umschriebene Dreieck $\overline{X}_1 \overline{X}_2 \overline{X}_3$ ist perspectivisch dem Dreiecke $O_1 O_2 O_3$, so dass die Verbindungslinien der drei gegenüberliegenden Eckenpaare in einem Punkte μ, dem Centrum der Perspectivität, zusammentreffen. Von diesem Punkte ziehen an den Grundkegelschnitt k zwei Tangenten $x'\overline{x}''$, welche die Bilder der fraglichen Tangentialpunkte $X'X''$ auf der Plancurve sind, deren weitere Construction in der Figur eingesehen wird.

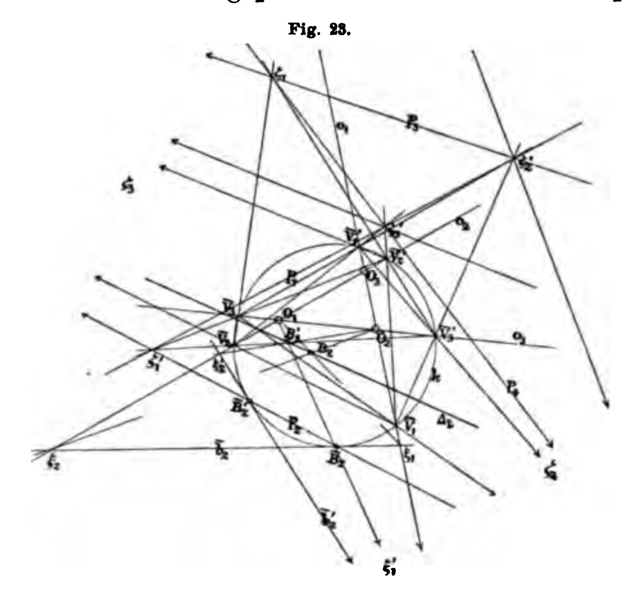
§ 20. Die Doppeltangenten.

157. Die in dem Systeme des Grundkegelschnitts k abgebildeten vier Doppeltangenten $\varDelta$ der ebenen Curve

C_6^4 sind, entsprechend der vorliegenden quadratischen Verwandtschaft, vier Kegelschnitte, deren jeder dem Hauptdreiseite einbeschrieben ist und den Grundkegelschnitt doppelt berührt. Die gemeinschaftlichen Tangenten eines Paares dieser beiden Kegelschnitte sind die Bilder der Berührpunkte einer Doppeltangente, und jeder Berührpunkt eines dieser Kegelschnittspaare entspricht der betreffenden Doppeltangente auf der Plancurve.

Die lineare Ausmittlung der Doppeltangenten $\varDelta$ und ihrer Berührungspunkte B erfordert die polare

Fig. 23.



Durchführung der in (82) und (83) gezeigten Constructionen. Mit Rücksicht darauf erhalten wir jetzt (Fig. 23.) die Schnittpunkte des Grundkegelschnitts k mit den Hauptlinien $o_1 o_2 o_3$ als Verzweigungselementenpaare: $\overline{V}\,\overline{V}'$.

Die viererlei Projectivitäten, welche nach (82) zwischen den sechs Verzweigungselementen stattfinden, ergeben, wenn man die einander entsprechenden Elemente durch Gerade verbindet, das nachstehende zu (82) analoge Constructionsschema:

$$(\overline{V}_1\overline{V}_2, \quad \overline{V}_1'\overline{V}_2') = \zeta_3; \quad (\overline{V}_1\overline{V}_2', \quad \overline{V}_1'\overline{V}_2) = \zeta_3'$$
$$(\overline{V}_1\overline{V}_3, \quad \overline{V}_1'\overline{V}_3') = \zeta_2; \quad (\overline{V}_1\overline{V}_3', \quad \overline{V}_1'\overline{V}_3) = \zeta_2'$$
$$(\overline{V}_2\overline{V}_3, \quad \overline{V}_2'\overline{V}_3') = \zeta_1; \quad (\overline{V}_2\overline{V}_3', \quad \overline{V}_2'\overline{V}_3) = \zeta_1'.$$

Die drei $\zeta\zeta'$-Punktenpaare liegen jedes auf der betreffenden Polaren eines der Hauptpunkte $O_1 O_2 O_3$ und deren Elemente sind conjugirte Pole in Bezug des Grundkegelschnitts. Es werden nämlich coaxial auf jeder Polare eines Hauptpunktes zwei Involutionen, ähnlich wie in (83), auf den Seiten des Hauptdreiecks $O_1 O_2 O_3$, hervorgerufen. Die eine dieser Involutionen ist durch die beiden Schnittpunkte fixirt, welche die durch den Hauptpunkt gehenden Hauptlinien auf der Polare ausschneiden. Diese ist immer hyperbolisch. Die andere Involution ruft der betreffende Hauptpunkt von selbst hervor. Die harmonisch gemeinsamen Doppelelemente dieser beiden Involutionen sind (reell, imaginär) die Punktenpaare $\zeta\zeta'$.

Die Elemente dieser drei Paare conjugirter Pole liegen wieder tripelweise, wie in (82), auf den Berührungssehnen p:

$$\zeta_1\zeta_2\zeta_3' = p_4; \quad \zeta_1\zeta_3\zeta_2' = p_3; \quad \zeta_2\zeta_3\zeta_1' = p_2; \quad \zeta_3'\zeta_2'\zeta_1' = p_1.$$

Jene Tangenten $\overline{b}\overline{b}'$, welche in den Endpunkten $\overline{B}\overline{B}'$ einer p-Sehne dem Grundkegelschnitt angehören, sind

die Bilder der Berührungspunkte BB' einer Doppeltangente auf der Plancurve C_6^4. Unsere Figur zeigt die Construction für die Doppeltangente Δ_2 und ihrer Berührpunkte $B_2 B_2'$.

§ 21. Classification der Plancurve.

158. Enthält der Grundkegelschnitt 0, 1, 2, 3 Hauptpunkte $O_1 O_2 O_3$, dann degenerirt die Classenzahl der Plancurve C_6^4 um 0, 1, 2, 3 Einheiten und jedem Hauptpunkte dieser Art entspricht auf der Plancurve eine Spitze, womit sich das Gesetz in (74) bestätigt. Eine ebene Curve C_3^4 enthält somit drei Spitzen, deren drei Rückkehrtangenten sich in einem Punkte gemeinsam schneiden (75). Nach (132) sind die in den Hauptpunkten $O_1 O_2$ an den Grundkegelschnitt ziehenden Tangenten die Bilder der den Spitzen $O_1 O_2$ zugehörigen Rückkehrtangenten (Doppelpunktstangenten), während die Spitzentangente in O_3 der in der Fundamentalinvolution (141) harmonisch zugeordnete Strahl der dort gehenden Kegelschnittstangente ist.

§ 22. Inflexionselemente.

159. Wir wissen aus (88), dass eine Plancurve 4ter Ordnung höchstens sechs Inflexionen enthält. Um dieselben constructiv in der vorliegenden Verwandtschaftsbeziehung ermitteln zu können, erinnern wir uns des (102) absoluten symmetrischen Systems der Tangentialpunkte auf dieser Plancurve.

Wenn wir dieses System auf dem Grundkegel-

schnitte abbilden, so entspricht demselben dort ein symmetrisches Tangentensystem 4ten Grades, dessen Directionscurve nach dem Satze (117) eine Ortscurve D_6^4 sein muss, welche uns am einfachsten die Inflexionselemente der Plancurve C_6^4 angeben wird.

Für die bezeichnete Abbildung verwenden wir die bezügliche Construction in (156). Dabei finden wir nachstehende Singularitäten in Uebereinstimmung mit dem Satze (117):

1) Hat man die p-Sehnen nach der Anleitung in (157) fixirt, so sind deren Endpunkte $\overline{B}\overline{B}'$ gemeinschaftliche Schnittelemente zwischen Grundkegelschnitt und Directionscurve;

2) die gemeinschaftlichen Tangenten dieser beiden Curven berühren jede den Grundkegelschnitt in dem Bilde des Tangentialpunktes einer Inflexionstangente und weiter: die Directionscurve in einem Punkte, von welchem die an den Grundkegelschnitt ziehende zweite Tangente auf ihn das Bild des zugehörigen Inflexionspunktes angibt.

Abweichend, und der polaren Beziehung in der vorliegenden Aufgabe genügend, ergeben sich die Doppelpunkte der Directionscurve als die drei Hauptpunkte $O_1 O_2 O_3$. Es lässt sich die Richtigkeit dieser Behauptung leicht nachweisen, wenn man die Verzweigungstangenten, das sind diejenigen Geraden, welche den Grundkegelschnitt in den (157) Punktenelementen $\overline{V}\overline{V}'$ berühren, der Construction in (156) unterwirft. Betrachten wir die Sache etwa für die Verzweigungs-

tangente $\bar{v}_1 \equiv \bar{x}$ des Punktes $\bar{V}_1$, welcher also (Fig. 23) von der Hauptlinie o_1 auf dem Kegelschnitte ausgeschnitten wird. Von dem Tripel der ξ-Punkte ist ξ_1 mit $\bar{V}_1$ in Coincidenz, somit fällt auch die zweite aus $\bar{V}_1 \equiv \xi_1$ laufende Tangente $\bar{x}_1$ mit $\bar{v}_1$ zusammen. Aus diesem Zusammenfalle der Geraden $\bar{v}_1 \bar{x}_1$ folgt der weitere Zusammenfall der Punkte $\xi_2 X_3$ und $\xi_3 X_2$ und die in den Punken $\xi_2 \xi_3$ ziehenden Tangenten $x_2 \bar{x}_3$ treffen sich in dem Punkte $\bar{X}_1$. Wegen der Coincidenzen der Paare $\bar{x}\bar{x}_1$, $\xi_2 \bar{X}_3$, $\xi_3 \bar{X}_2$ folgt, dass die beiden nach (156) perspectivischen Dreiseite $o_1 o_2 o_3$, $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$ ihr Centrum μ im Hauptpunkte O_1 haben. Ganz dasselbe Resultat findet man aber, wenn man mit der in dem zweiten Punkte $\bar{V}_1'$ der Hauptlinie o_1 an den Grundkegelschnitt gezogenen Tangente $\bar{v}_1'$ die Construction ausführt, woraus also evident der Punkt O_1 als ein Doppelpunkt der Directionscurve folgt. Eine analoge Untersuchung zeigt das Paar $O_2 O_3$ als Doppelpunkte dieser Curve.

Die Geraden, welche man für jede Tangente $\bar{v}$ des Paares $\bar{V}_1 \bar{V}_1'$ als die Verbindungslinien des betreffenden $\bar{X}_1$-Punktes mit O_1 erhielt, sind die Doppelpunktstangenten in O_1 für die Directionscurve. Durch eine ähnliche Construction findet man die Doppelpunktstangenten der beiden andern Doppelpunkte $O_2 O_3$ der Curve.

Siebenter Abschnitt.

Die viermal berührenden Kegelschnitte einer C_6^4.

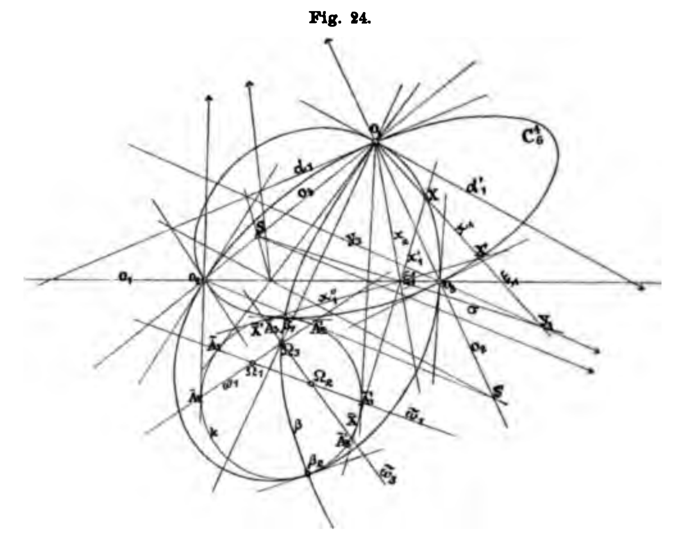
§ 23. Construction und Abbildung.

160. Es wurde mit Bezug auf (10) wiederholt in dem Vorausgegangenen bemerkt, dass ein Kegelschnitt mit einer Plancurve 4ter Ordnung höchstenfalls $2 \cdot 4 = 8$ Punkte (als Sekantenelemente beider Curven) gemeinsam haben kann. Wir wollen nun in diesem Abschnitte jenen Fall in Betracht ziehen, wenn jene acht Punktenelemente paarweise in Coincidenz treten, was viermal möglich ist und also der betreffende Kegelschnitt mit der Plancurve eine viermalige Berührung eingeht. Wir werden im Verlaufe unserer Untersuchungen sehr bald zur Einsicht kommen, dass der Fall eines viermal berührenden Kegelschnitts für eine Curve 4ter Ordnung grosses Interesse bietet, weil dadurch neue Gesichtspunkte für die Erzeugung dieser Curven sowie für die Betrachtung ihrer wesentlichsten Eigenschaften und Merkmale gewonnen werden. Insbesondere wird dieses möglich sein, sobald es uns gelingt, eine Curve 4ter Ordnung auf einem sie viermal berührenden Kegelschnitte nach den Gesetzen einer quadratischen Transformation abzubilden.

161. Um die Beziehungen festzusetzen, denken wir uns (Fig. 24.) eine Plancurve C_6^4 mit den drei Doppelpunkten $O_1 O_2 O_3$ in der Ebene gegeben. Wir ziehen nach einem beliebigen Punkte X der Curve

einen Strahl x_1 aus dem Doppelpunkte O_1; dieser trifft die dem Punkte O_1 gegenüberliegende Seite o_1

Fig. 24.



des Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ in einem Punkte ξ_1. Man kann nun ξ_1 als Element zweier auf o_1 befindlichen projectivischen Punktenreihen ansehen, deren Doppelelemente die beiden auf dieser Geraden vorkommenden Doppelpunkte $O_2 O_3$ der Curve sind. Auf diese Art erscheint dem Punkte ξ_1 ein Punkt ξ_1' zugeordnet. Verbindet man ξ_1' mit dem Curvenpunkte X, so entsteht eine Gerade $|\xi_1' X| \equiv x_1'$.

Der Strahl x_1 enthält bekanntlich noch einen zweiten Curvenpunkt X' und man erkennt leicht, dass sich für diesen Punkt dem erklärten Vorgange gemäss die Verbindungslinie $|\xi_1' X'| \equiv x_1''$ anordnet. Man kann also jetzt schon festhalten, dass einem beliebigen Strahle x_1 des Doppelpunktes O_1 ein bestimmtes Geradenpaar $x_1' x_1''$ zugeordnet erscheint.

162. „Beschreibt der Doppelpunktsstrahl x_1 ein Büschel 1ter Ordnung, so beschreibt das ihm zugeordnete Geradenpaar $x_1'x_1''$ ein Büschel 2ter Ordnung (Tangentenbüschel), dessen Enveloppe ein Kegelschnitt k ist, der die Plancurve in vier Punkten $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ einfach berührt.“

Man sieht ohne Schwierigkeit ein, dass die Geradenpaare $x_1'x_1''$ eine Tangenteninvolution auf dem Kegelschnitte k formiren, deren Axe die Gerade o_1 ist. Ebenso muss auch angenommen werden, dass die beiden auf o_1 coaxialen projectivischen Punktenreihen $\xi_1\xi_1'$ eine Involution bilden können, ohne dass dadurch das charakterisirte Gesetz der gezeigten Beziehung eine wesentliche Aenderung erfährt. Allein, soviel lässt sich denn doch erkennen, dass die projectivische Beziehung der beiden Punktenreihen $\xi_1\xi_1'$ eine willkürliche ist und dass bei einer vorliegenden Plancurve C_6^4 diese Beziehung nur eine ganz bestimmte sein kann, wenn das Erzeugniss der $x_1'x_1''$-Paare einen, die Curve viermal berührenden Kegelschnitt ergeben soll.

163. Kehrt man somit die Angabebedingungen um, so dass etwa der Kegelschnitt k und die drei Doppelpunkte $O_1O_2O_3$ gegeben erscheinen, so muss die projectivische Beziehung der $\xi_1\xi_1'$-Reihen ihren entsprechenden Ausdruck finden. Dieses erreicht man z. B. dadurch, dass ein Paar entsprechender Elemente $\xi_1\xi_1'$ dieser Reihen so gegeben ist, dass die Elemente

der einen Reihe (etwa ξ_1) perspectivisch dem Strahlenbüschel x_1 in O_1 zugewiesen sind. Würde diese letztere Bedingung nicht gestellt, so ist einzusehen, dass die Aufgabe zwei verschiedene Curven als Lösungen resultiren müsste.

Wäre jedoch die Beziehung der auf o_1 coaxialen Reihen $\xi_1 \xi_1'$, wie schon oben gesagt wurde, involutorisch, dann enthält die Aufgabe nur eine einzige Curve als Lösung.

Ist der Kegelschnitt k als solcher nicht angegeben, so muss derselbe durch äquivalente Bedingungen bestimmbar sein. Dieses geschieht am einfachsten durch Angabe von fünf Punktenelementen der Plancurve, die sich dann als ebensoviele Bestimmungselemente des Kegelschnitts k übertragen lassen. Die Richtigkeit dessen wird erkannt, wenn man sich erinnert, dass eine Plancurve 4[ter] Ordnung nach (4) durch 14 Punkte bestimmt wird. Da die drei Doppelpunkte neun Elemente repräsentiren, so geben diese mit den fünf weiter gegebenen zusammen die verlangte Bedingungszahl.

164. „Man construire die Plancurve 4[ter] Ordnung, von welcher die drei Doppelpunkte $O_1 O_2 O_3$ und der sie viermal berührende Kegelschnitt k bekannt sind."

Die Plancurve ist, wie oben hervorgehoben ist, nur dann eindeutig bestimmt, sobald auf der Geraden $|O_2 O_3| \equiv o_1$ ein Punktenpaar der projectivischen Reihen $\xi_1 \xi_1'$, deren Doppelpunkte $O_2 O_3$ sind, angenommen

wird. Dabei ordnen wir die Reihe ξ_1 perspectivisch dem Strahlenbüschel x_1 in O_1 und ebenso die Reihe ξ_1' den Tangentenpaaren $x_1'x_1''$ der Involution auf dem Kegelschnitte k mit der Involutionsaxe o_1 zu.

Der Strahl x_1 schneidet das Tangentenpaar $x_1'x_1''$ in zwei Punkten XX' der Plancurve. Diese ist somit der geometrische Ort der Punktenpaare XX'. Um die Vervollständigung der Reihen $\xi_1\xi_1'$ zu bewerkstelligen, bedienen wir uns der nachstehenden aus den Elementen bekannten Construction.

Auf der Verbindungslinie $O_1 O_2 | \equiv o_3$ (oder auch auf o_2) nehme man einen beliebigen Punkt S als Centrum eines Strahlenbüschels an, welches mit der Reihe ξ_1' perspectivisch ist. Dieses Büschel S ist offenbar wieder perspectivisch mit dem Büschel O_1, dessen Elemente die Strahlen x_1 sind und die Elemente der Reihe ξ_1 enthalten. Beide Büschel O_1S haben als Perspectivitätsaxe eine Gerade y_3, welche durch den Doppelpunkt O_3 hindurchgeht. Einen zweiten Punkt Y_3 der Geraden y_3 erhalten wir sofort aus dem Schnitte der beiden Strahlen x_1 und $S\xi_1' \equiv \sigma$. Die Construction der Curvenpunkte XX' gestaltet sich jetzt einfach dahin, dass man einen beliebigen Punkt Y_3 der Geraden y_3 mit den beiden Centren O_1, S durch Strahlen $x_1\sigma$ verbindet, welche die Linie o_1 in einem Paare zugeordneter Punkte $\xi_1\xi_1'$ treffen. Die Schnitte des Strahles x_1 mit den beiden aus ξ_1' an den Kegelschnitt k gezogenen Tangenten $x_1'x_1''$ zeigen das gesuchte Resultat der XX'-Punkte.

165. Denkt man sich die Plancurve mit dem sie viermal berührenden Kegelschnitt in der Ebene festliegend, so ist leicht einzusehen, dass die vorstehenden Beziehungen der Construction analog bestehen bleiben für jeden der drei Doppelpunkte $O_1 O_2 O_3$ und die betreffende gegenüberliegende Verbindungslinie der beiden andern Doppelpunkte und dass sich nur entsprechend die auf dieser letztern nothwendig auftretenden projectivischen Reihen $\xi\xi'$ gestalten. Es wird demgemäss der Satz auszusprechen sein:

„In einer Plancurve 4ter Ordnung ist jeder Doppelpunkt das Centrum eines Strahlenbüschels, welches mit einer ihm zugeordneten Tangenteninvolution eines unveränderlichen, die Curve viermal berührenden Kegelschnitts, deren Axe die diesem Doppelpunkte gegenüberliegende Seite des Doppelpunktsdreiecks ist, diese Curve erzeugt.“

166. In jedem Punkte der Plancurve wird dieselbe nur von einem einzigen Kegelschnitte der besprochenen Art berührt, so dass also der Curve ein System von viermal berührenden Kegelschnitten angehört. Hierbei können die Individuen dieses Systems die Plancurve in reellen, theilweise oder ganz in imaginären Punkten berühren. Es werden aber auch Degenerationen dieser Individuen vorkommen können, wie die folgenden Untersuchungen zeigen sollen.

§ 24. Gemeinschaftliche Elemente mit einer Geraden.

167. Jede Gerade g der Ebene ruft auf einem der Kegelschnitte k des Systems (166) in bekannter Weise eine Tangenteninvolution hervor, deren Axe sie ist. Dieser Tangenteninvolution ist auf k eine (quadratische) Punkteninvolution perspectivisch, deren Centrum G der Pol der Geraden g ist. Auf diese Weise ist G der Mittelpunkt einer Strahleninvolution J_G. Auf gleiche Weise entsteht bezüglich des Kegelschnitts k eine Strahleninvolution J_Ω, deren Centrum Ω der Pol einer der Seiten o des Doppelpunktsdreiecks $O_1 O_2 O_3$ ist.

Es seien solcherart für einen bestimmten Kegelschnitt k (Fundamentalkegelschnitt) die beiden Involutionen J_G, $J_{\Omega 1}$, die letztere für die Dreiecksseite o_1, festgehalten. Beide Involutionen als projectivische Strahlengebilde erzeugen einen Kegelschnitt $\varkappa$. Entsprechende Elemente dieses Erzeugnisses findet man folgend.*) Ein Strahl x_1 des Büschels O_1 (161) trifft die Gerade g in einem Punkte γ_1; das dem Strahle x_1 zugeordnete Tangentenpaar $x_1' x_1''$ des Fundamentalkegelschnitts k berührt diesen in einem Punktenpaare, dessen Verbindungslinie die Polare des Punktes ξ_1' und ein Strahl des Büschels Ω_1 ist. Die Polaren der beiden Punkte $\gamma_1 \xi_1'$ sind projectivisch entsprechende Elemente der Büschel $G \Omega_1$ und erzeugen in ihrem Schnitte einen Punkt G_1 des Kegelschnitts $\varkappa$, welcher letztere bekanntlich die Büschelmittelpunkte $G \Omega_1$ enthält.

*) Man ergänze sich die Figur.

Die Schnittpunkte 1234 der Kegelschnitte $\varkappa k$ sind, insofern man sich die Punkte der Plancurve auf dem Fundamentalkegelschnitte k gewissermassen abgebildet*) vorstellen kann, die Bilder der vier Punkte I II III IV, welche die Gerade g mit der Plancurve gemeinschaftlich hat. Man erhält die letztern als Schnitte der g-Geraden mit den in den Punkten 1234 an den Fundamentalkegelschnitt k ziehenden Tangenten.

Zugleich erkennt man, dass der Kegelschnitt $\varkappa$ als das Bild der Geraden g betrachtet werden kann, indem jedem Punkte γ_1 der Geraden g ein bestimmter Punkt G_1 des Kegelschnitts $\varkappa$ als Bild zugeordnet ist. Man findet derart bestätigt, dass die Plancurve von der 4ten Ordnung sein muss, indem sie höchstenfalls vier Punkte I II III IV auf der g-Geraden enthalten kann.

168. Würde man die vorstehenden Beziehungen der Geraden g bezüglich der beiden übrigen Seiten $o_2 o_3$ des Doppelpunktsdreiecks $O_1 O_2 O_3$ und des fixen Kegelschnitts k wiederholen, so müsste identisch der Kegelschnitt $\varkappa$ als Bild dieser Geraden resultiren, der dann also auch durch die Pole $\Omega_2 \Omega_3$ dieser Seiten in Bezug auf k hindurchgehen muss. Daraus lässt sich nun der wichtige Satz ableiten:

„Die Bilder der gesammten Geraden g (Sekanten) einer Plancurve 4ter Ordnung formiren auf einem Fundamentalkegelschnitt k, welcher die

*) u. z., wie die folgenden Ergebnisse erweisen werden, nach den Gesetzen einer „quadratischen Verwandtschaft“.

Curve viermal berührt, ein Netz von Kegelschnitten $\varkappa$ mit drei Grundpunkten $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$, welche letzteren die Pole der Seiten des Doppelpunktsdreiecks $O_1 O_2 O_3$ sind."

Wir nennen dieses Kegelschnittsnetz: „Fundamentalnetz" und das Dreieck $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$: „Fundamentaldreieck". Ohne Schwierigkeit erkennt man die Seiten $\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3$ des Fundamentaldreiecks als Polaren der Doppelpunkte $O_1 O_2 O_3$ in Bezug des Kegelschnitts k, aus welchem Grunde sich auch die beiden Dreiecke $O_1 O_2 O_3$, $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ in perspectivischer Lage befinden, d. h.: die Strahlentrias $|O_1\Omega_1|$, $|O_2\Omega_2|$, $|O_3\Omega_3|$ hat einen gemeinschaftlichen Punkt.

169. Wenn auf einer Geraden g zwei Curvenpunkte I II bekannt sind, so lässt sich das restliche Paar III IV linear bestimmen, ohne dass man das Bild der Geraden, den Kegelschnitt $\varkappa$, zu zeichnen braucht. Man vergleiche deshalb die Construction in (61). Behandelt man nämlich das Dreieck $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ als Hauptdreieck und den Kegelschnitt k als Grundkegelschnitt wie dort, so hat man zunächst die gegebenen Punkte I II auf den Kegelschnitt k in 1 2 ($= X X'$) mittelst der diesen Punkten entsprechenden Tangenten der Involution J_Ω abzubilden, wie oben angegeben wurde. Nun wird das Punktenpaar XX' aus den Fundamentalpunkten $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ nach $X_1 X_2 X_3$, $X_1' X_2' X_3'$ auf den Kegelschnitt k projicirt und, gemäss der in (61) gezeigten Projectivität, geschieht die Construction:

$$(|X_1 X_2'|, |X_2 X_1'|) \equiv \xi_3; \quad (|X_1 X_3'|, |X_3 X_1'|) \equiv \xi_2;$$
$$(|X_2 X_3'|, |X_3 X_2'|) \equiv \xi_1.$$

Die Verbindungsgerade des Punktentripels $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ schneidet auf k das Punktenpaar $X'' X'''$ ($\equiv 34$) aus, deren Bilder mittelst der in diesen Punkten an den Kegelschnitt k ziehenden Tangenten (als Elemente der Involution J_Ω) auf der Plancurve in III IV als die gesuchten erhalten werden (164). Dass die Elemente des Tripels $\xi_1 \xi_2 \xi_3$ auf den gleichindextirten Seiten $\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_3$ des Fundamentaldreiecks $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$ liegen, ist von früher bekannt.

170. Der ∞ fernen Geraden der Ebene entspricht im Fundamentalnetz*) ein Kegelschnitt $\varkappa$, der ausser den Netzpunkten $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$ (167) auch noch den Mittelpunkt M des Fundamentalkegelschnitts enthalten muss. Dieser Kegelschnitt $\varkappa$ besitzt mit k höchstens vier gemeinschaftliche Punkte, die uns die Bilder der ∞ fernen Punkte der Plancurve angegeben. Offenbar erhalten wir durch die in diesen vier Punkten ziehenden Tangenten an k unmittelbar die Asymptoten der Plancurve. Die Realität der Asymptotenelemente der Plancurve hängt wieder von der Realität der besagten, zwischen den Kegelschnitten $k \varkappa$ gemeinsamen Elemente ab. Darnach wird man auch die verschiedenen Fälle, die wir in (77) charakterisirt haben, unterscheiden können.

*) analog dem Hauptkreise in (76).

§ 25. Singularitäten.

171. Wir wissen aus (164), dass auf jedem Strahle der Punkte $O_1 O_2 O_3$ (Fig. 24) nur noch zwei Curvenpunkte Platz finden, weshalb die Punkte $O_1 O_2 O_3$ als Doppelpunkte der Plancurve gelten müssen. Jeder Doppelpunkt formirt aus diesem Grunde eine quadratische Fundamentalinvolution (89) auf der Curve. In dem Büschel, welches in einem Doppelpunkte derart gebildet ist, kommen bekanntlich zwei Gattungen von Singularitäten der Plancurve vor: Doppelpunktstangenten und Verzweigungstangenten.

Will man in der vorliegenden Beziehung die Doppelpunktstangenten $d_1 d_1'$ in O_1 bestimmen, so beachte man, dass in O_1 sich zwei Punktenelemente unendlich nahe vereinigen, die durch die aus O_1 an den Fundamentalkegelschnitt gehenden Tangenten auf diesem abgebildet werden: es sind dieses (64) die Nachbarpunkte $\bar{A}_1 A_1'$ als Endpunkte der Polaren $\bar{\omega}_1$. Eine solche Tangente, da sie ein Element der Involution $J_{\Omega 1}$ (167) bedeutet, trifft die Dreiecksseite o_1 in einem Punkte der Reihe ξ_1'. Verbindet man ξ_1' mit dem Centrum S durch eine Gerade, so gibt diese auf der Perspectivitätsaxe y_3 den zugeordneten Punkt der Reihe Y_3 an. Aus leicht begreiflichen Gründen ist also die Verbindungslinie $Y_3 O_1 \mid$ die eine Doppelpunktstangente d_1 in O_1. Analog ist die Construction der anderen Tangente d_1' dieses Doppelpunktes.

172. Handelt es sich um die Ermittlung der Tangenten in den beiden übrigen Doppelpunkten $O_2 O_3$, so bemerke man Folgendes. Erstlich könnte die Construction dieser Tangenten in ganz analoger Weise geschehen, wie diejenige in O_1, wenn man für jeden dieser Doppelpunkte $O_2 O_3$ und ihrer gegenüberliegenden Dreiecksseite $o_2 o_3$ aus fünf Curvenpunkten je einen zugeordneten vierfach berührenden Kegelschnitt suchen würde. Es lässt sich aber auch die Construction dieser Tangentenpaare alleinig mit Hilfe des schon vorhandenen Fundamentalkegelschnitts k ausführen: Zieht z. B. aus O_2 an k eine Tangente, so trifft diese die Dreiecksseite o_2 in einem Centrum S'. Die Verbindungslinie des Centrums S' mit einem Punkte der Reihe ξ_1' auf o_1 schneidet den entsprechenden Strahl x_1 des Büschels O_1 (der durch den conjugirten ξ_1-Punkt von ξ_1' geht) in einem Punkte; die Verbindungsgerade dieses letzteren Punktes mit O_2 ist eine Doppelpunktstangente. Ganz ähnlich findet man die übrigen Tangenten der Doppelpunkte $O_2 O_3$.

173. Hat der Fundamentalkegelschnitt k mit den Seiten des Doppelpunktsdreiecks $O_1 O_2 O_3$ gemeinschaftliche Punkte, so sind deren Bilder auf der Plancurve Verzweigungselemente. Nehmen wir (Fig. 25 Taf. I.) an, k werde von o_1 in dem Punktenpaare $\overline{V}_1 \overline{V}_1'$ geschnitten, so geben die Tangenten, die man in diesen Punkten an den Kegelschnitt k ziehen kann (das sind die Doppelstrahlen der Involution J_{Ω_1}), schnittweise

mit den entsprechenden Strahlen x_1 des Büschels O_1 die Verzweigungspunkte $V_1 V_1'$ auf der Curve an, während diese x_1-Strahlen die zugehörigen Verzweigungsstrahlen jenes Doppelpunktes selber sind.

174. Es wurde in (167) darauf hingewiesen, dass (Fig. 24.) jedem Strahle x_1 des Büschels O_1 ein Tangentenpaar $x_1' x_1''$ der zu Grunde liegenden Involution des Fundamentalkegelschnitts entspricht, dass aber perspectivisch mit dieser Involution jene J_{Ω_1} zusammenhängt, deren Centrum Ω_1 ist und deren Strahlenelemente solcherart, wie jetzt eingesehen wird, jenen Elementen des Büschels O_1 projectivisch entsprechen. Wir haben es demnach hier mit zwei projectivischen Strahlenbüscheln $O_1 \Omega_1$ zu thun, deren Erzeugniss ein Kegelschnitt β ist. Die gemeinschaftlichen Elemente zwischen den Kegelschnitten $k \beta$ sind nun offenbar nichts anderes als die in (162) bezeichneten vier Punkte $\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4$, in welchen die Plancurve von dem Fundamentalkegelschnitte k einfach berührt wird. Es leuchtet ein, dass diese vier Schnittpunkte vollständig reell oder theilweise und auch ganz imaginär sein können, so dass der Fundamentalkegelschnitt die Plancurve in vier reellen, imaginären oder zum Theile reellen und imaginären Punkten zu berühren vermag. Als Bestimmungselemente des Kegelschnitts β sind a priori die beiden Büschelmittelpunkte $O_1 \Omega_1$ gegeben. Man kann sich jedoch durch eine einfache Ueberlegung überzeugen, dass auch das Verzweigungspunktenpaar

$V_1 V_1'$ (173), welches bezugs des Doppelpunktes O_1 der Plancurve angehört, in seinen beiden Elementen dem Kegelschnitt β eigen ist. Ebenso wird man bemerken können, dass sich die Seitenpaare $o_3 \tilde{\omega}_2$, $o_2 \tilde{\omega}_3$ der beiden Dreiecke $O_1 O_2 O_3$, $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$ in zwei Punkten des Kegelschnitts β schneiden, indem die bezüglichen Seiten eines solchen Paares entsprechende Elemente der betrachteten Büschel $O_1 \Omega_1$ vorstellen. Es ist eine bekannte Kegelschnittsaufgabe, die Tangenten in den Büschelmittelpunkten $O_1 \Omega_1$ zu finden, was mittelst des gemeinschaftlichen Strahles $|O_1 \Omega_1|$ geschieht, je nachdem man denselben als dem einen oder anderen Büschelcentrum zugehörig betrachtet. $|O_1 \Omega_1$ als ein x_1-Strahl angesehen, enthält auf dem o_1-Träger einen ξ_1-Punkt; suchen wir den zugeordneten ξ_1'-Punkt nach (164), so ist dessen Polare bezugs des Grundkegelschnitts k die Tangente in Ω_1 an den Kegelschnitt β. Sieht man andererseits die Gerade $|O_1 \Omega_1|$ als ein Element des Büschels Ω_1 an, so ist der Pol dieser Geraden bezugs des Grundkegelschnitts ein ξ_1'-Punkt auf o_1, durch dessen zugeordneten ξ_1-Punkt die fragliche Tangente an den Kegelschnitt β im Punkte O_1 läuft.

Das Vorstehende in Zusammenfassung, lässt also sofort sechs Stücke des Kegelschnitts β als angegeben ansehen, womit dieser schon mehr als genügend bestimmt erscheint. Dass aber der Kegelschnitt β keine andern als die angegebenen Punkte, nämlich den Doppelpunkt O_1, die beiden ihm zukommenden Ver-

zweigungspunkte $V_1 V_1'$ und das Berührungsquadrupel $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$ als Elemente der Plancurve enthalten kann, bestätigt sich aus (10), indem ein Kegelschnitt mit einer Curve 4[ter] Ordnung höchstenfalls $2 \cdot 4 = 8$ Punkte gemeinschaftlich haben kann, womit sich die Aufgabe dieses Kegelschnitts gegen die betrachtete C_6^4 vollständig erschöpft.

175. Im Fundamentalnetz $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ entspricht bildlich jedem den Kegelschnitt k einfach in einem Punkte $\overline{X}$ berührenden Kegelschnitt τ eine Tangente t der Plancurve, welche die letztere in dem Bildpunkte X von $\overline{X}$ einfach berührt. Dieser Kegelschnitt schneidet den Fundamentalkegelschnitt k noch in einem Punktenpaare $\overline{X}'\overline{X}''$, dessen Elemente die beiden Tangentialpunkte der einfachen Curventangente t abbilden. Ist der Bildpunkt $\overline{X}$ auf k angegeben, so findet man das Paar $\overline{X}'\overline{X}''$ mit Hilfe der in (69) angegebenen Construction nachstehend: Die Mittelpunkte $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ projiciren den Punkt $\overline{X}$ nach $\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3$ auf den Fundamentalkegelschnitt k. Nun erfolgt das Schema:

$$(|\overline{X}_1\overline{X}_2|,\ |\Omega_1\Omega_2|) \doteq \xi_3;\quad (|\overline{X}_1\overline{X}_3|,\ |\Omega_1\Omega_3|) \doteq \xi_2;$$
$$(|\overline{X}_2\overline{X}_3|,\ |\Omega_2\Omega_3|) \doteq \xi_1.$$

Die Punkte $\xi_1\xi_2\xi_3$ gehören einer und derselben Geraden (Perspectivitätsaxe) an, welche auf dem Fundamentalkegelschnitte das Bildpunktenpaar $\overline{X}'\overline{X}''$ ausschneidet.

Diese Construction gilt allgemein und modificirt sich demnach entsprechend für eine Doppelpunkts-

oder für eine Verzweigungstangente eines der drei Curvendoppelpunkte $O_1 O_2 O_3$.

176. Ist auf der Plancurve ein beliebiger Punkt β_1 angenommen, so kommt einem solchen (166) nur ein einziger die Curve an vier Stellen berührender Kegelschnitt k zu. Es lässt sich nun die Aufgabe stellen: „man suche die drei übrigen Berührungspunkte $\beta_2 \beta_3 \beta_4$ dieses Kegelschnittes auf der Plancurve.“

Um diese Aufgabe zu lösen, halte man sich vor Augen, dass der gegebene Punkt β_1 schon ein Element des fraglichen Kegelschnitts bildet. Wir können nun sofort nach (175) die in β_1 gehende Curventangente t bestimmen. Diese Tangente ist aber, wie leicht einzusehen ist, ein Element jener quadratischen Tangenteninvolution, welche bezüglich einer Seite z. B. o_1 und des gegenüberliegenden Punktes O_1 des Doppelpunktdreiecks $O_1 O_2 O_3$ die Plancurve nach (162) erzeugt. Der Punkt β_1 und die Tangente t sind demnach incidente Elemente des Kegelschnitts k, für den jetzt nur mehr drei Bestimmungselemente aufzusuchen, notwendig ist. Diese erhält man, wenn drei beliebige Curvenpunkte der Beziehung in (164) unterworfen werden.

Ist auf diese Art der Kegelschnitt k (den man übrigens nicht zu zeichnen braucht) fixirt, so kann man nun leicht nach (174) den Kegelschnitt β construiren, welcher das restliche Punktentripel $\beta_2 \beta_3 \beta_4$ der vierfachen Berührung zwischen dem Kegelschnitte k und der Plancurve angibt.

177. Um die Classe der Plancurve 4[ter] Ordnung der gegenwärtigen Beziehung feststellen zu können, nehmen wir in der Ebene einen beliebigen Punkt M an. Aus (97) ist bekannt, dass der angenommene Punkt als Mittelpunkt eines Strahlenbüschels auf der Curve eine (centrale) biquadratische Involution hervorruft. Diese letztere besitzt sechs Doppelelemente, d. h. man kann aus M an die Curve höchstenfalls sechs Tangenten ziehen.

Nach (167) entspricht jedem Strahle des Büschels M ein Bildkegelschnitt des Fundamentalnetzes $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$; da aber jedes Individuum dieses Netzes den Bildpunkt des Centrums M enthalten muss, so wird aus dem Netze ein Büschel von Kegelschnitten. In diesem Büschel gibt es somit sechs Kegelschnitte, welche den Fundamentalkegelschnitt k einfach berühren und welche als die Bilder der aus M an die Plancurve ziehenden Tangenten gelten müssen. Die Plancurve 4[ter] Ordnung zeigt sich nach dieser Untersuchung als höchstenfalls 6[ter] Classe, weshalb sie mit dem Symbole: C_6^4 endgiltig zu bezeichnen ist.

178. Im Fundamentalnetz $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ kommen vier Kegelschnitte δ vor, welche den Kegelschnitt k doppelt berühren. Die Bilder dieser Kegelschnitte sind die Doppeltangenten Δ der Curve C_6^4. Die Construction der Berührungssehnen p der doppelt berührenden Kegelschnitte kann nach (82) oder (83) geschehen, je nachdem die Verzweigungselementenpaare $\overline{V}\overline{V}'$,

welche die Punkte $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ auf dem Fundamentalkegelschnitt k hervorbringen, reell oder imaginär sind.

Für den erstern Fall, bei reellen Paaren $\overline{V}\overline{V}'$, erfolgt (Fig. 25. Tafel I.) die Construction:

$$(|\overline{V}_1\overline{V}_2|,\ |\overline{V}_1'\overline{V}_2'|) \equiv \zeta_3; \quad (|\overline{V}_1\overline{V}_2'|,\ |\overline{V}_1'\overline{V}_2|) \equiv \zeta_3'$$
$$(|\overline{V}_1\overline{V}_3|,\ |\overline{V}_1'\overline{V}_3'|) \equiv \zeta_2; \quad (|\overline{V}_1\overline{V}_3'|,\ |\overline{V}_1'\overline{V}_3|) \equiv \zeta_2'$$
$$(|\overline{V}_2\overline{V}_3|,\ |\overline{V}_2'\overline{V}_3'|) \equiv \zeta_1; \quad (|\overline{V}_2\overline{V}_3'|,\ |\overline{V}_2'\overline{V}_3|) \equiv \zeta_1'.$$

Die Tripel: $\zeta_3\zeta_2\zeta_1'$; $\zeta_3\zeta_1\zeta_2'$; $\zeta_2\zeta_1\zeta_3'$; $\zeta_2'\zeta_3'\zeta_1'$, deren Elemente sich als conjugirte Pole auf den Dreiecksseiten $\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3$ paaren, liegen auf den Sehnen $p_1p_2p_3p_4$.

Die Schnittpunkte BB' einer p-Sehne bilden auf dem Fundamentalkegelschnitte k das Berührungspunktenpaar BB' einer Doppeltangente der Plancurve C_6^4 ab. Man erhält somit dieses Berührpunktenpaar mittelst der Tangenten, welche man in den Endpunkten der betreffenden p-Sehne an k zieht, indem man diese Tangenten mit den ihnen entsprechenden Strahlen x_1 des miterzeugenden Büschels O_1 verschneidet.

Der andere Fall, wo die Verzweigungspaare $\overline{V}\overline{V}'$ imaginär erscheinen, bedingt die Construction in (83), welche für den vorliegenden Fall ohne Schwierigkeit durchgeführt wird.

179. Die sechs Inflexionstangenten i, welche eine Plancurve C_6^4 aufzuweisen im Stande ist, bilden sich im Fundamentalnetz $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ als sechs den Kegelschnitt k osculirende Kegelschnitte ι ab. Um die Inflexionselemente zu bestimmen, erinnern wir uns an

das in (102) bezeichnete absolute System der Tangentialpunkte. Die einzelnen Paare dieses Systems werden nach der in (175) angeführten Construction auf dem Fundamentalkegelschnitt k ermittelt und umhüllen durch ihre Verbindungslinien die Directionscurve D_4^6. Diese enthält die Seiten des Dreiecks $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ als Doppeltangenten und gibt nach dem Satze (117) die fraglichen Inflexionspunkte als Bilder auf dem Fundamentalkegelschnitt k an.

180. Es muss noch angemerkt werden, inwiefern die Lage des Fundamentalkegelschnitts k gegenüber den beiden Dreiecken $O_1O_2O_3$, $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ Einfluss nehmen kann auf die Realität der Doppeltangenten und der Doppelpunkte sowie damit auf die Art der Plancurve 4ter Ordnung. Hierüber ist Folgendes zu sagen.

Sind die Netzpunkte $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ vollständig von dem Kegelschnitte k um- oder ausgeschlossen, so sind die Punkte $O_1O_2O_3$ eigentliche Doppelpunkte der Curve und es besitzt dieselbe vier reelle Doppeltangenten.

Umfasst der Fundamentalkegelschnitt k das Dreieck $O_1O_2O_3$, so sind die Doppelpunkte der Curve isolirt und sie enthält ebenfalls vier reelle Doppeltangenten.

Sind 1, 2, 3 Seiten des Doppelpunktsdreiecks $O_1O_2O_3$ Tangenten des Grundkegelschnitts k, so ist derselbe ein die Plan-

Sind 1, 2, 3 Ecken des Doppelpunktsdreiecks $O_1O_2O_3$ Punkte des Grundkegelschnitts k, so ist derselbe ein die Plancurve

curve 4ter Ordnung 3, 2, 1 Mal berührender und ihre Ordnung vermindert sich ebenfalls um 1, 2, 3 Einheiten.

4ter Ordnung 3, 2, 1 Mal berührender und ihre Classe vermindert sich ebenfalls um 1, 2, 3 Einheiten.

181. Wenn ein Doppelpunkt der Plancurve C_6^4 der Pol der gegenüberliegenden Seite des Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ in Bezug des Fundamentalkegelschnitts k ist, so sind dessen Tangenten gleichzeitig Wendetangenten der Curve, wie schon in (134) gezeigt wurde. Ebenso ist zu merken, dass für den Fall, als das Doppelpunktsdreieck $O_1 O_2 O_3$ bezüglich des Kegelschnitts k ein sich selbst conjugirtes ist, somit der eine von den drei Doppelpunkten sich im Innern dieses Kegelschnitts befindet, während die beiden andern ausserhalb liegen, die gesammten reellen Doppelpunktstangenten (vier) Wendetangenten sind, und der innerhalb gelegene Doppelpunkt ein Einsiedler sein muss.

Achter Abschnitt.

Circulare Curven vierter Ordnung.

§ 26. Die Kreisverwandtschaft und ihre Consequenzen.

182. Jede Gerade g der Ebene einer C_6^4 schneidet sie ordnungsmässig in vier Punkten. Diese vier Punkte können nur paarweise reell oder imaginär sein, so dass also nicht möglich ist, dass etwa eine

g-Gerade einen oder drei reelle Punkte der Curve aufweist, sondern nur alle vier, zwei oder gar kein Punkt reell vorhanden ist; immer aber zählen die vorkommendenfalls imaginären Schnittpunktenpaare als Curvenelemente. Von besonderer Bedeutung ist die unendlich ferne Gerade $g\infty$ einer Plancurve 4ter Ordnung, weil sie, wie wir (76) gehört haben, die Asymptotenelemente bedingt. Diese vermögen also nur paarweise reell oder imaginär vorzukommen, und wir müssen uns jedenfalls die Frage vorlegen, wie diese Thatsache durch die Lage und etwa auch durch die Eigenthümlichkeit des Grundkegelschnitts k, auf welchem die Curve im quadratischen Verwandtschaftssinne abgebildet wird, zu erklären ist.

Die Lagenbeziehung des Grundkegelschnitts gegenüber dem Hauptkreise $\varkappa$ hat uns in (77) vollständig Aufschluss über die Realität der Asymptotenelemente der Plancure C_6^4 gegeben. Darnach wird jede als Grundkegelschnitt fungirende Curve 2ter Ordnung den Hauptkreis in 2, 1, 0 Punktenpaaren schneiden, und die Bildcurve C_6^4 wird entsprechend 2, 1, 0 Paare Asymptotenelemente enthalten, wobei natürlich Coincidenzen nicht ausgeschlossen sind. Es ist aber der Fall, wo der Grundkegelschnitt k ein Kreis ist, speciell ins Auge zu fassen, weil ja bekanntlich demselben auf $g\infty$ die imaginären Kreispunkte angehören (80).

183. Wegen der perspectivischen Beziehung (41) der Geraden $g\infty$ in den beiden quadratisch verwandten



Systemen $\Sigma\overline{\Sigma}$ einer C_6^4 und eines Grundkreises k, besitzen beide Curven, die sich gegenseitig abbilden, gemeinschaftlich die imaginären Kreispunkte ihrer Ebene, weshalb jede von ihnen eine circulare Curve genannt wird.

Einer circularen Plancurve 4ter Ordnung mit drei Doppelpunkten entspricht somit bildlich immer nur ein einziger Kreis, und wir können aus diesem Grunde die Curve wie in (80) eine „Kreisverwandte" nennen. Eine solche kann nie mehr als zwei reelle Asymptoten haben, ohne dass damit eine Coincidenz oder auch das Imaginärsein dieser selbst ausgeschlossen ist, in welch letzterem Falle die Curve ganz im Endlichen verläuft und der Grundkreis k den Hauptkreis $\varkappa$ gar nicht schneidet.

184. „Eine circulare C_6^4 ist durch Angabe der drei Doppelpunkte $O_1 O_2 O_3$ und drei beliebiger ihrer Punkte $XX'X''$ vollständig bestimmt." Der Nachweis davon ist leicht, denn die drei Doppelpunkte repräsentiren $3 \cdot 3 = 9$ Bedingungen; die Punkte $XX'X''$ mit den imaginären Kreispunkten zählen weitere fünf Bedingungen. Im Ganzen sind also vierzehn Bedingungen bekannt, wie es nach (65) sein soll. Die Bildpunkte $\overline{X}\overline{X}'\overline{X}''$ bestimmen den Grundkreis k.

In den Fällen, wo einer der Hauptpunkte $O_1 O_2 O_3$ ein Rückkehrpunkt ist, zählt derselbe bekanntlich zur Curvenangabe für vier Bedingungen. Für 1, 2, 3 Rückkehrpunkte sind demnach 2, 1, 0 X-Punkten-Angaben

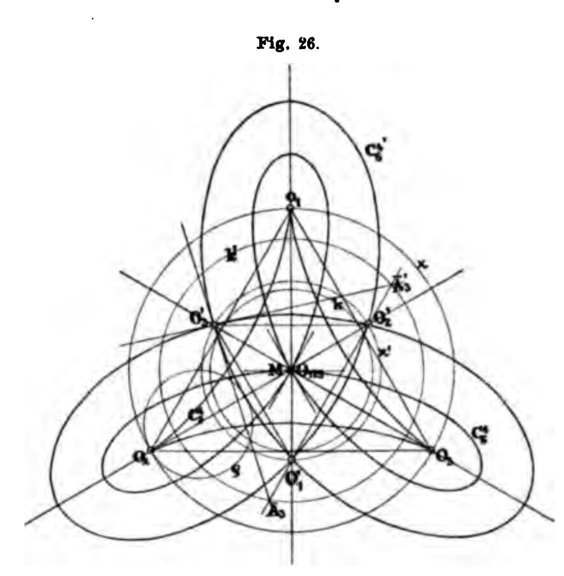
der Curve nothwendig. Dadurch ist jedoch die Curve nicht unzweifelhaft bestimmt, denn bei den zwei ersten Annahmen, wo 1, 2 Rückkehrpunkte und 2, 1 X-Punkte bekannt sind (selbstverständlich 2, 1 Doppelpunkte inbegriffen), gibt es jedesmal zwei k-Kreislösungen, welche Kreise ein- oder zweimal die Seiten des Hauptdreiecks $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ berühren, während im Falle von drei Rückkehrpunkten $O_1 O_2 O_3$ vier Grundkreise k vorkommen, die dem Hauptdreiecke $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ eingeschrieben sind und demnach auch vier verschiedene circulare Curven vom Symbole C_3^4 bedingen. Die vier letzteren C_3^4 unterscheiden sich auch durch ihre Asymptotenelemente folgend: Eine von ihnen besitzt nur imaginäre Asymptoten; es ist diejenige, deren Grundkreis aus dem Mittelpunkte M des Hauptdreiecks $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ diesem letzteren einbeschrieben ist, und somit den Hauptkreis $\varkappa$ in keinem $\overline{U}$-Punkte, der nach (78) das Bild eines Asymptotenpunktes der Curve wäre, schneidet. Die drei anderen Grundkreise, welche die Seiten des Dreiecks $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ in dessen Aussenräumen berühren, müssen jeder den Hauptkreis $\varkappa$ in einem $\overline{U}$-Punktenpaare nothwendig schneiden, weshalb auch ihre abgebildeten Circularen C_3^4 ein Paar reelle Asymptotenelemente enthalten.

§ 27. Eigenschaften der Symmetrie und die Rollcurven. (Hypocycloiden.)

185. Eine besondere Eigenthümlichkeit ist einer circularen Plancurve 4ter Ordnung zugeschrieben, wenn ihr Doppelpunktsdreieck $O_1 O_2 O_3$ gleichseitig ist.

(Fig. 26.) Die Möglichkeit dieser Situation verlangt die Beziehung in (46) a), wo die homologen Hauptpunkte $O_3 O_3$ zusammenfallen, und zwischen dem Mittelpunkte M des Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ und demjenigen des ihm umschriebenen Hauptkreises $\varkappa$ eine Identität stattfindet. Ist nun M gleichzeitig Mittelpunkt des Grundkreises k, dann ist die Plancurve C_6^4 unter allen Umständen dreiaxig symmetrisch gegen die Verbindungslinien des M-Punktes mit den Ecken des Hauptdreiecks $O_1 O_2 O_3$. Je nachdem der aus M beschriebene Grundkreis k die Seiten des Hauptdreiecks $O_1 O_2 O_3$ in reellen oder in imaginären Punktenpaaren trifft, ist die symmetrische Curve eine verlängerte oder eine verkürzte dreiästige Hypocycloide, wohingegen sie, wenn der Grundkreis k aus M dem Dreieck $O_1 O_2 O_3$ einbeschrieben ist, eine Steiner'sche dreispitzige Hypocycloide vom Symbole C_3^4 wird (86).

Fig. 26.



186. „Eine Hypocycloide besitzt die $g\infty$ als ideelle Doppeltangente.“ Die Richtigkeit dieses

Satzes erfolgt daraus, dass die eine der vier in (82) bezeichneten p-Sehnen sich mit der unendlich fernen $g\infty$ identificirt, wie man durch unmittelbare Anschauung wegen der Gleichseitigkeit der Hauptdreiecke $O_1 O_2 O_3 \equiv \bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ ersehen wird. Im Einklange mit dem früher Gesagten wird ferner zu bemerken sein, dass eine symmetrische dreispitzige Hypocycloide durch Angabe der drei Rückkehrpunkte $O_1 O_2 O_3$ vollständig bestimmt ist, denn die letzteren drücken als vierelementige Singularitäten zwölf Elemente aus, was für die Curve, weil sie eine Kreisverwandte ist, ausreichend ist, sofern der M-Punkt als Schnitt der Spitzentangenten gilt.

187. Bekanntlich wird eine dreiaxig symmetrische Hypocycloide mit drei Spitzen vom Symbole C_3^4 in Figur 26. als Rollcurve dadurch bedingt, dass der Radius des Rollkreises ϱ den dritten Theil von dem Radius des Basiskreises $\varkappa$ beträgt. Denkt man sich eine solche Curve construirt und wird in einer Spitzenlage O_2 des Rollkreises sein Radius nach auswärts in der betreffenden Spitzentangente aufgetragen und dieser Auftragepunkt in bekannter Weise als der beschreibende Punkt angenommen, so ist dessen geometrischer Ort eine verlängerte oder Schleifen-Hypocycloide C_6^4. Allein, diese C_6^4 bietet ein höchst interessantes Resultat, denn ihre drei Doppelpunkte fallen in einen einzigen O_{123}, und zwar den oben bezeichneten M-Punkt zusammen, so dass wir eine dreiaxig symmetrische Schleifen-

curve 4ter Ordnung mit einem dreifachen Knotenpunkte in M erhalten. Eine derartige Curve lässt sich mit unseren Hilfsmitteln nicht im quadratischen Verwandtschaftssinne auf einem Kreise abbilden, weil das Hauptdreieck $O_1 O_2 O_3$ und folglich auch der demselben umschriebene Hauptkreis $\varkappa$ sich in dem Tripelknoten M auf Null reduciren. Nichts desto weniger sind wir imstande, die drei Knotentangenten des Singularpunktes M anzugeben: Sie laufen parallel den Hauptseiten $o_1 o_2 o_3$ der zugrundegelegten dreispitzigen Hypocycloide und die gleiche Eigenschaft findet statt für die Richtung der drei reellen Doppeltangenten der Curve. Mit Ausnahme dieses einzigen Falles also ist festzustellen, dass wir jede Hypocycloide nach unseren Anleitungen durch zweideutige Strahlenbüschel erzeugen können, und dass man von ihrer Eigenschaft als Rollcurve, womit in constructiver Hinsicht bekanntlich nur annähernd genaue Resultate zustandekommen, vollständig absehen kann, ein Vortheil, der für die angewandte Geometrie ins Gewicht fällt.

188. Die gesammten in M concentrischen Kreise machen bekanntlich nach (17) ein Büschel von sich imaginär doppelt berührenden Kreislinien aus, welchen ebensoviele verkürzte oder verlängerte Hypocycloiden entsprechen. Der Uebergangsfall zwischen beiden Gruppen ist die genannte Steiner'sche Curve. Man kann aber auch einen Uebergang in der Gruppe der

sogenannten verlängerten oder Schleifencurven wahrnehmen, der dadurch charakterisirt ist, dass der eine Theil der betrachteten Curvengruppe $C_6^{4\prime}$ in jeder Schleife alle drei Doppelpunkte enthält, oder dass eine Schleife nur einen einzigen Doppelpunkt besitzt. Bedingt wird diese Sache durch die Lage des betreffenden Grundkreises k, welcher im ersteren Falle als k' das Hauptdreieck $O_1'O_2'O_3'$ und folglich auch den Hauptkreis $\varkappa'$ umschliesst, während im letzteren Falle das Gegentheil vorkommt. Der Uebergang zwischen diesen beiden Fällen tritt ein, wenn der Hauptkreis $\varkappa$ als Grundkreis angesehen wird, wo wir dann das Hauptdreieck $O_1 O_2 O_3$ im Zusammenhange mit der Geraden $g\infty$ als ein Erzeugniss 4[ter] Ordnung mit sechs Doppelpunkten, entsprechend der Curvendegeneration, betrachten müssen, denn jede Gerade als Theilerzeugniss (37) einer Curve bedingt so viele Doppelpunkte, als sie Schnittpunkte mit ihr besitzt.

Ist ein Grundkreisindividuum des oben bezeichneten Büschels von kleinerem Radius, als derjenige des eingeschriebenen Kreises, der die Steiner'sche Curve bedingt, so ist also, wie schon bemerkt wurde, einem solchen Kreise eine verkürzte Hypocycloide entsprechend, für welche die Ecken des Hauptdreiecks $O_1 O_2 O_3$ isolirte Punkte sind, und es ist dieser Fall auch der einzige, wo die Hypocycloide reelle Inflexionselemente haben kann, aber nicht unbedingt haben muss.

Neunter Abschnitt.

Contactcurven vierter Ordnung.

§ 28. Constructionsbeziehungen.

189. Wenn man eine Steiner'sche Verwandtschaft zwischen zwei ebenen Systemen $\Sigma\overline{\Sigma}$ festsetzt, so ist die Annahme, die wir in (46) auseinandergesetzt haben, von Interesse, weil sie uns über den Fall Aufschluss gibt und die besonderen Eigenschaften kennen lehrt, wenn in einer ebenen Curve 4ter Ordnung eine gegenseitige Berührung zwischen zwei Aesten derselben vorkommt, wenn also in der Curve ein Contactelement auftritt. Dieses wird immer geschehen, sobald man für die quadratische Beziehung einen der beiden Fälle b) und c) in (46) voraussetzt, indem beide zunächst eine Coincidenz zweier Hauptpunkte des Dreiecks $O_1O_2O_3$ und demgemäss ein Zusammenfallen von zwei Doppelpunkten der Plancurve in sich schliessen. Der Zusammenfall zweier Doppelpunkte einer ebenen Curve 4ter Ordnung bedingt also in dem Coincidenzelemente einen Contact der Curve und es besitzen demnach derlei Curven für das Auge nur zwei mehrfache Punkte, von denen der eine ein einfacher Doppelpunkt, der andere ein Berührungs- oder Contactknoten ist. Wir wollen der Kürze halber derlei Plancurven: Contactcurven bezeichnen.

190. Zunächst muss untersucht werden, wie sich die Constructionsbeziehungen in den beiden ange-

zogenen Fällen (46) b) und c) modificiren, sobald die Situation auf dem Grundkegelschnitt in Betracht gezogen wird. Aber wir werden uns mit dem erstern Fall nur ganz kurz und nur der Vollständigkeit halber beschäftigen, weil er eine zu specielle Beziehung und Situation ausspricht, welche allerdings auch wieder bei bestimmten Voraussetzungen, wie z. B. in symmetrischen Curven, mit Nutzen verwendet werden kann.

Beziehungen nach dem Falle (46) b).

191. Hiernach hat man sich (Fig. 27.) die beiden Hauptdreiecke $O_1 O_2 O_3$, $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ so zu denken, dass die

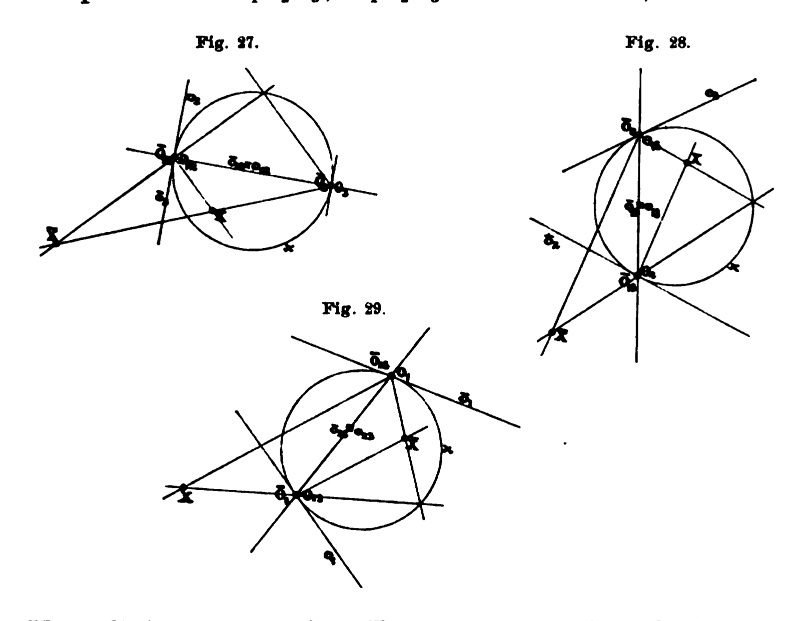


Fig. 27. Fig. 28. Fig. 29.

Hauptlinie $o_3 \equiv \bar{o}_3$ eine Tangente des Hauptkreises $\varkappa$ und ebenso die ihr parallele Verbindungsgerade $|O_3 \bar{O}_3|$ eine Tangente dieses Kreises werden. In Folge dessen

wird der Berührpunkt der ersteren Tangente einen Zusammenfall der Hauptpunktenpaare $O_1 O_2$, $\bar{O}_1 \bar{O}_2$ anzeigen und somit durch die Identität $O_{12} \equiv \bar{O}_{12}$ ausgedrückt, während der Berührpunkt der letzteren Tangente die Identität $O_3 \equiv \bar{O}_3$ aussagt. Gleicherweise erhalten wir aber in der Verbindungsgeraden der zwei Berührpunkte ein Identität der Coincidenzhauptlinien $o_{12} \equiv \bar{o}_{12}$ und es wird diese Gerade zum Durchmesser des Hauptkreises $\varkappa$. Wenn wir auch einen Zusammenfall der Punkte $O_3 \bar{O}_3$ hier voraussetzen, so muss wohl bemerkt werden, dass dieses nicht unbedingt nothwendig ist und dass diese Punkte ebensogut in ihrem gesetzmässigen Zusammenhange als Perspectivitätscentra getrennt liegend, gedacht werden können.

Nun lässt sich leicht die Abbildung eines beliebigen Punktes $\bar{X}$ des Systems $\bar{\Sigma}$ in das System Σ verfolgen, wenn die diesbezüglichen Constructionen in (45) und (58) im Auge behalten werden: „Wir verbinden den $\bar{X}$-Punkt mit den Hauptpunkten $\bar{O}_3 \bar{O}_{12}$; zu dem Verbindungsstrahle $|\bar{O}_{12} \bar{X}|$ ziehen wir den Parallelstrahl durch $\bar{O}_3$ und verbinden dessen Kreisschnitt mit O_{12}. Die zuletzt gezogene Verbindungslinie verschneidet sich mit dem Strahle $|\bar{O}_3 \bar{X}|$ in dem verlangten Bilde X."

Beziehungen nach dem Falle (46) c).

192. Die beiden Geraden $|O_1 O_2| \equiv o_3$, $|O_2 O_3| \equiv o_1$ als Seiten des Hauptdreiecks $O_1 O_2 O_3$ gelangen (Fig. 28.) zur Deckung und bilden eine Sehne des Hauptkreises $\varkappa$; demnach entsteht in O_{13} ein Coincidenzpunkt, dessen

Kreistangente o_2 die Seite $|O_1O_3|$ des Hauptdreiecks vorstellt. Zugleich erscheint aber der Hauptpunkt $\bar{O}_3$ mit dem Punkte O_2 vereinigt. Wir haben uns also den Punkt $O_{13} \equiv \bar{O}_2$ als Coincidenz des Tripels $O_1\bar{O}_2O_3$ und den Punkt $O_2 \equiv \bar{O}_{13}$ als Coincidenz des Tripels $O_2\bar{O}_1\bar{O}_3$ zu denken, wobei gleichzeitig O_{13} das Perspectivitätscentrum des Systems $\bar{\Sigma}$, während O_2 jenes des Systems Σ repräsentirt. Die Construction des Bildes X eines beliebigen $\bar{X}$-Punktes der Ebene gestaltet sich folgend: „Nach dem Punkte $\bar{X}$ ziehen aus $\ddot{O}_2\bar{O}_{13}$ zwei Hauptstrahlen; der Kreisschnitt des letzteren wird mit O_{13} verbunden, welche Verbindungslinie sich mit der aus $\bar{O}_{13}$ gezogenen, zu dem ersteren Hauptstrahle gleichgerichteten Geraden in dem gesuchten Bilde X schneidet.“

Ausser dem eben gezeigten Fall, kann auch in der Situation der Hauptdreiecke $O_1O_2O_3$, $\bar{O}_2O_1\bar{O}_3\,|\equiv O_1O_2\bar{O}|$ der folgende vorkommen. Es treten (Fig. 29.) die Hauptlinien $\bar{o}_2\bar{o}_3$ im $\bar{\Sigma}$-Systeme und also auch die Hauptlinien o_2o_3 im Σ-Systeme in Deckung, so dass für die ersteren die Coincidenzlinie $\bar{o}_{23}$ und für die letzteren die Coincidenzlinie o_{23} entsteht, diese aber selbst wieder in der einzigen Hauptkreissehne, die wir kurzweg mit $o_{23} \equiv \bar{o}_{23}$ bezeichnen, zusammenfallen. Als Endpunkte dieser Decksehne ergeben sich dann Coincidenzen $O_1 \equiv \bar{O}_{23}$ und $\bar{O}_1 \equiv O_{23}$. Die Kreistangenten o_1 im Hauptpunkte O_{23} und $\bar{o}_1$ im Hauptpunkte $\bar{O}_{23} \equiv O_1$ vervollständigen im Vereine mit der Hauptlinie $o_{23} \equiv \bar{o}_{23}$ das bezügliche nunmehr

wieder degenerirte Hauptdreieck des betreffenden Systems $\Sigma\overline{\Sigma}$.

Das Constructionsgesetz für die transformatorische Uebertragung eines $\overline{X}$-Punktes in sein X-Punktenbild spricht sich jetzt so aus: „Nach dem $\overline{X}$-Punkte laufen Strahlen der zwei Hauptpunkte $O_1 \overline{O}_{23}$; der Strahl $|\overline{O}_{23}\overline{X}|$ trifft den Hauptkreis in einem Punkte, welcher mit O_{23} durch eine Gerade zu verbinden ist. Letztere Verbindungslinie schneidet sich mit dem zu $|\overline{O}_1\overline{X}|$ durch den Punkt O_1 parallel verlaufenden Constructionsstrahl in dem Bilde X."

193. Ist in der Ebene dem Systeme $\overline{\Sigma}$ ein beliebiger Grundkegelschnitt k angehörig, so ist sein Bild nach dem Principe der quadratischen Beziehung im Systeme Σ eine Curve 4[ter] Ordnung. Verbinden wir irgend einen Punkt $\overline{X}$ dieses Kegelschnitts durch zwei Hauptstrahlen, so entspricht jedem nach den beiden vorstehenden Constructionsfällen jedesmal ein Hauptstrahl, welche beiden Strahlen einander in dem Bilde X treffen; dieses Bild ist ein Punktenelement der Plancurve. Weil nun jeder nach einem $\overline{X}$-Punkte gezogene Hauptstrahl den Grundkegelschnitt im Allgemeinen noch in einem zweiten Punkte schneidet, und diese Eigenschaft sich als eine gegenseitige bekundet, so sehen wir wieder in den Hauptpunkten eines jeden der Systeme $\Sigma\overline{\Sigma}$ zwei doppeldeutige Strahlenbüschel, welche einerseits in reducirter Lage den Grundkegelschnitt, andererseits in nicht reducirter

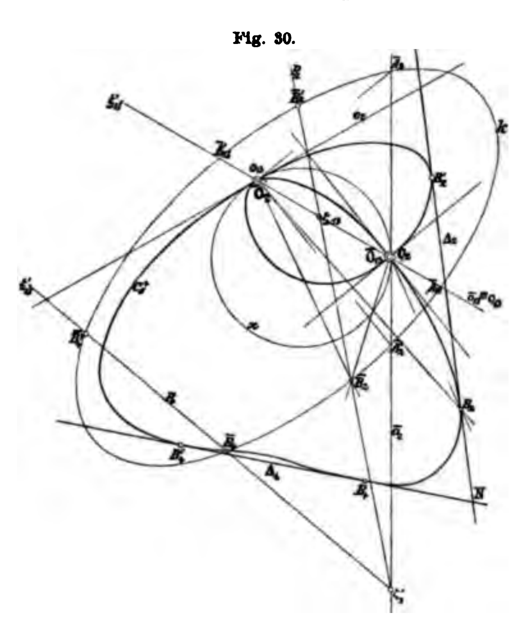
Lage (32) die Plancurve 4ter Ordnung erzeugen. In jedem der beiden Fälle erkennt man in dem Kreisdurchmesser, resp. in der Kreissehne, ein Reductionselementenpaar 2ter Ordnung, dessen Schnitt auf der Curve in Coincidenz mit dem einen Doppelpunkte kommt, so dass dieser einen Contact auf derselben erzeugt. Mit Rücksicht darauf, dass das Contactelement aus dem Zusammenfall zweier Doppelpunkte entsteht, deren jeder für drei Elemente zählt, ist dasselbe bei Bestimmung der Curve für $2 \cdot 3 = 6$ Elemente in Rechnung zu ziehen. — Wir wollen nun in den folgenden Ableitungen die Haupteigenschaften einer Contactcurve 4ter Ordnung erörtern, wobei sich zeigen wird, dass dieselben, wie ja selbstverständlich, nur Modificationen der bereits im Vorhergehenden ausgewiesenen Regeln constatiren. Dabei soll von den beiden Constructionsannahmen b) und c) in (46) hauptsächlich nur die letztere, weil sie sich weniger speciell gestaltet, zur Anwendung gelangen, um nicht weitläufig zu werden und unnötige Wiederholungen zu vermeiden.

§ 29. **Die Annahme (46) c) zu Grunde liegend.**

194. Ein beliebiger Kreis $\varkappa$ (Fig. 30.), eine beliebige Sehne o_{13} desselben und die Tangente o_3 in einem ihrer Endpunkte fixiren die quadratische Beziehung. Der Berührungspunkt der Tangente dieses Hauptkreises drückt die Coincidenz der Hauptpunkte $O_1 O_3$ aus, weshalb er mit O_{13} bezeichnet ist. Ebenso

ist die Kreissehne o_{13} eine Coincidenz der Hauptlinien $o_1 o_3$; der andere Endpunkt dieser Sehne ist der Hauptpunkt O_2 und die in O_{13} gehende Tangente die Hauptlinie o_2. Andererseits haben wir gleichzeitig an das Dreieck $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ des $\bar{\Sigma}$-Systems zu denken und finden, dass nach dem angedeuteten Vorgange ein Coincidenzpunkt $\bar{O}_{13}$ mit dem Hauptpunkte O_2 und dann noch ein Hauptpunkt $\bar{O}_2$ mit dem Coincidenzpunkte O_{13} zusammenfallen, während sich die zwei Coincidenzlinien $\bar{o}_{13} \equiv o_{13}$ ebenfalls in der oben genannten Sehne $|O_{13} O_2|$ decken. Demnach wird auch im $\bar{\Sigma}$-Systeme eine Kreistangente des $\bar{O}_{13} \equiv O_2$-Punktes stattfinden, die man als die Hauptlinie $\bar{o}_2$ ansehen muss, was alles bereits oben in Fig. 28. erörtert wurde.

Fig. 30.

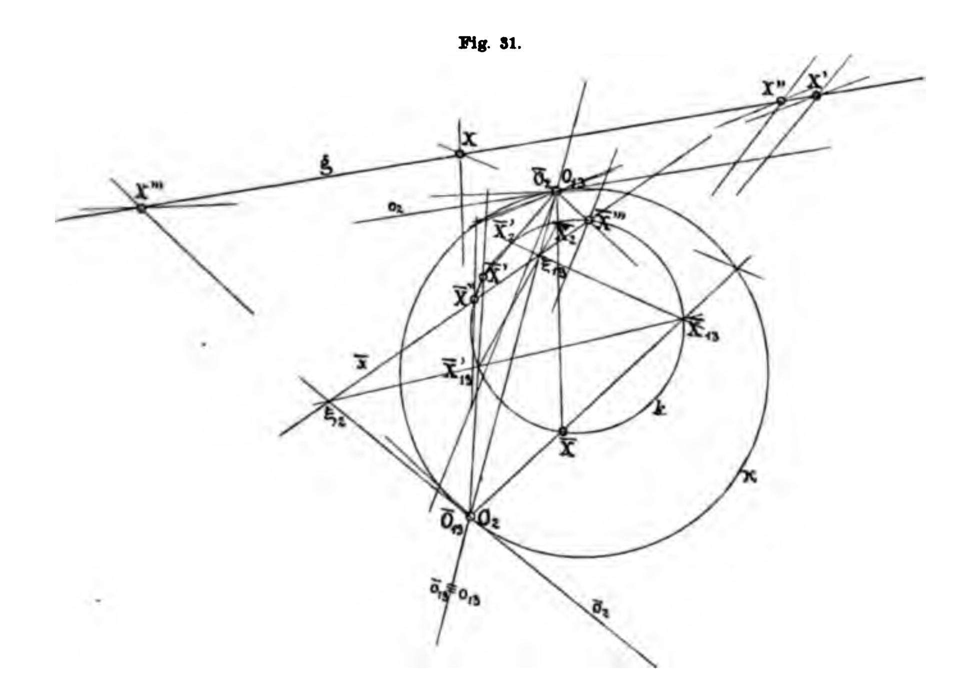


Ein beliebiger Grundkegelschnitt k ist das Bild der Plancurve 4ter Ordnung, welche im Hauptpunkte $O_{13} \equiv \bar{O}_2$ (bildlich entsprechend gedacht) einen Contact und in $O_2 \equiv \bar{O}_{13}$ einen Doppelpunkt besitzt, während die Hauptlinie o_2 die Tangente an die Curve in dem

Contactknoten O_{13} ist. Diese Tangente drückt offenbar vier coincidirende Elemente aus.

195. Sekantenconstruction. (Fig. 31.) Wir wissen, das Bild einer beliebigen Geraden g der Ebene ist

Fig. 31.



ein Kegelschnitt, welcher dem Hauptdreiecke des andern Systems umschrieben ist. In unserm Falle erhalten wir also einen Kegelschnitt, der die Hauptlinie $\bar{o}_{13} \equiv o_{13}$ als gemeinschaftliche Sekante mit dem Hauptkreise enthält und diesen im Punkte $O_2 \equiv \bar{O}_{13}$ einfach berührt, also mit ihm die Hauptlinie $\bar{o}_2$ als gemeinschaftliche Tangente besitzt. Ueberdies hat dieser Kegelschnitt mit dem Hauptkreis noch einen Punkt

gemeinsam, der offenbar das Bild des ∞ fernen Punktes der gegebenen Geraden ist (48. e). Dieser Kegelschnitt hat mit dem Grundkegelschnitt k die Bilder der zwischen der Sekante und der Plancurve stattfindenden vier Schnittpunkte (60) gemeinschaftlich.

Ist nun die g-Gerade durch zwei Punkte XX' der Plancurve 4ter Ordnung angegeben, so findet man linear das restliche Paar des Quadrupels $XX'X''X'''$, wenn die Construction in (61) entsprechend modificirt wird.

Auf dem Grundkegelschnitt ist nämlich das Paar XX' in $\overline{X}\overline{X}'$ abgebildet. Das Punktenpaar $\xi_1\xi_3$ coincidirt in einem Punkte ξ_{13} auf der Hauptlinie $o_{13} \equiv o_{13}$; die Verbindungslinie $|\xi_{13}\xi_2| = \bar{x}$ schneidet auf dem Grundkegelschnitte das Bild $\overline{X}''\overline{X}'''$ des gesuchten Punktenpaares $X''X'''$ heraus. Die Punkte $\xi_{13}\xi_2$ ergeben sich aber folgend. Projiciren wir ordnungsgemäss das Punktenpaar $\overline{X}\overline{X}'$ aus den Hauptpunkten $\overline{O}_{13}\ddot{O}_2$ auf den Grundkegelschnitt k, so findet man die Paare $\overline{X}_{13}\overline{X}_{13}'$, $\overline{X}_2\overline{X}_2'$; nun ist:

$$(|\overline{X}_{13}\overline{X}_2'|, \quad |\overline{X}_{13}'\overline{X}_1|) \equiv \xi_{13} \text{ auf } \bar{o}_{13},$$

und

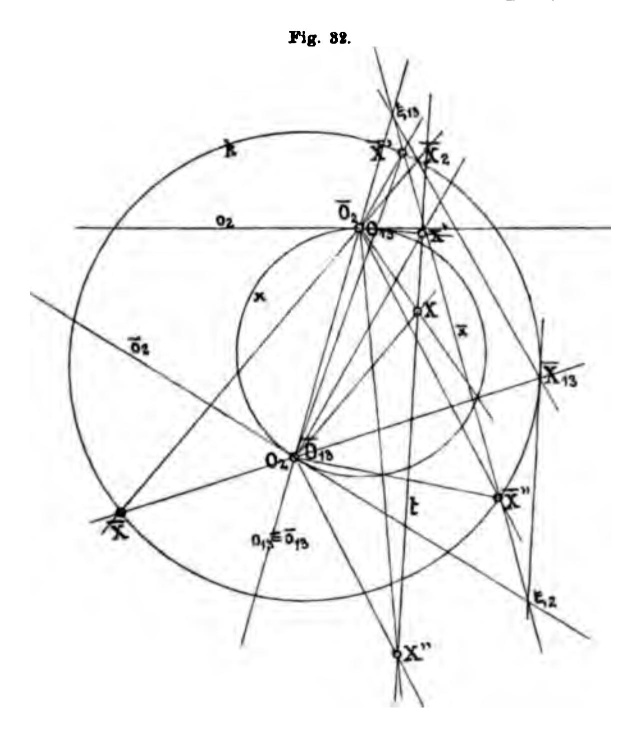
$$(|\overline{X}_{13}\overline{X}_{13}'|, \quad \bar{o}_2) \equiv \xi_2.$$

196. Tangentenconstruction. Nach (68) enthält (Fig. 32.) eine beliebige Tangente t der Plancurve 4ter Ordnung: den Berührpunkt X und das Tangentialpunktenpaar $X'X''$. Die Tangente, als gerader Punktenträger, hat zu ihrem Bilde einen Kegelschnitt, der im Bilde $\overline{X}$ den Grundkegelschnitt k einfach berührt und

in dem Bild-Paare $\overline{X}' X''$ schneidet. Dieser Kegelschnitt ist sonst wie in (195) bezüglich des Hauptkreises situirt.

Die Construction in (69) erfährt nachstehende Modification: Die Hauptpunkte $\bar{O}_{13}$, $\bar{O}_2$ projiciren den

Fig. 32.



Punkt $\overline{X}$ nach $\overline{X}_{13}$, $\overline{X}_2$ auf den Grundkegelschnitt. Die Verbindungslinie $\overline{X}_{13}\overline{X}_2$ trifft die Hauptlinie $\bar{o}_{13}$ in ξ_{13}; die Tangente des Grundkegelschnitts im Punkte $\overline{X}_{13}$ schneidet die Hauptlinie $\bar{o}_2$ im Punkte ξ_2. (Es muss nämlich die Verbindungslinie $\overline{X}_1\overline{X}_3$ gedacht werden, welche nothwendig, wegen des Coincidenzpunktes $\overline{X}_{13}$, zur Kegelschnittstangente wird.) Nun hat die Verbindungsgerade $\xi_{13}\xi_2 = \bar{x}$

mit dem Grundkegelschnitt das gesuchte Bildpaar $\overline{X}'\overline{X}''$ gemeinschaftlich.

197. Doppelpunktstangenten. Verzweigungselemente. (Fig. 30.) Die Hauptlinie $\bar{o}_2$ enthält mit dem Grundkegelschnitte das Nachbarpunktenpaar $\bar{A}_2\bar{A}_2'$, dessen Abbildung der Doppelpunkt $O_2(\equiv \overline{O}_{13})$ ist. Zieht man demnach aus dem Hauptpunkte $\overline{O}_2$ nach den Punkten $\bar{A}_2\bar{A}_2'$ Strahlen, so müssen offenbar die Doppelpunktstangenten in O_2 diesen Strahlen gleichlaufend sein. (Vergl. 194.)

Dass in dem Contactpunkte $O_{13}(\equiv \ddot{O}_2)$ die Tangente der Plancurve die in diesem Punkte gehende Hauptkreistangente o_2 sein wird, ist sofort klar, wenn man sich erinnert, dass diese Tangente nichts anderes als jene Hauptlinie o_2 ist, in welcher das Punktenpaar O_1O_3 zusammenfällt mit dem Hauptpunkte $\overline{O}_2$. Ferner ist nicht zu vergessen, dass der Contactpunkt O_{13} das Bild der beiden Nachbarpunktenpaare $\bar{A}_1\bar{A}_1'$, $\bar{A}_3\bar{A}_3'$ ist, welche sich durch die Coincidenzlinie $\bar{o}_{13} \equiv o_{13}$ als das Paar $\bar{A}_{13}\bar{A}_{13}'$ auf dem Grundkegelschnitt herausschneiden.

Verzweigungselemente gibt es auf der vorliegenden Plancurve nur zwei Paare, deren Bilder $\overline{V}_{13}\overline{V}_{13}'$, $\overline{V}_2\overline{V}_2'$ durch die aus den beiden Hauptpunkten $\overline{O}_{13}\overline{O}_2$ an den Grundkegelschnitt ziehenden Tangenten als deren Berührungspunkte erhalten werden. Das Paar $\overline{V}_{13}\overline{V}_{13}'$ stellt zwei Coincidenzelementenpaare vor. (In unserer Figur sind sämmtliche Verzweigungselemente imaginär.)

198. Doppeltangentenconstruction. Den in der Plancurve 4ter Ordnung vorkommenden Doppeltangenten $\varDelta$ entsprechen bekanntlich die den Grundkegelschnitt doppelt berührenden Kegelschnitte δ, deren jeder gegenüber dem Hauptkreise die in (195) bemerkte Situation hat. Verfolgt man die Construction der p-Sehnen in (82) für die in (197) angegebenen Verzweigungspaare $\overline{V}_{13}\overline{V}_{13}'$, $\overline{V}_2\overline{V}_2'$, so zeigt eine einfache geometrische Nachschau, dass die Elemente der Punktenpaare $\zeta_1\zeta_3$, $\zeta_1'\zeta_3'$ in Coincidenzen ζ_{13}, ζ_{13}' auf der Hauptlinie $\bar{o}_{13} \equiv o_{13}$ liegen müssen, während der Punkt ζ_2 des Paares $\zeta_2\zeta_2'$ der Hauptlinie $\bar{o}_2$ mit dem Hauptpunkte $(O_2 \equiv)$ $\bar{O}_{13}$ sich identificirt. Aus diesem Grunde fallen mit der Geraden $\bar{o}_{13}$ die Sehnen $p_1 p_3$ zusammen, weshalb sich deren Endpunkte paarweise mit dem Nachbar-Coincidenzpunktenpaare $\bar{A}_{13}\bar{A}_{13}'$ identificiren, was ausdrücken will: dass in der Contacttangente o_2 der Plancurve ein Paar der vier Doppeltangenten vereinigt sind.

Hieraus ergibt sich, dass nur noch das Sehnenpaar $p_2 p_4$ erübrigt. Die Construction der betreffenden ζ-Punkte dieses Sehnenpaares ist folgende:

a) für reelle Verzweigungselemente $\overline{V}$:

$$(|\overline{V}_{13}\overline{V}_2'|, \ |\overline{V}_{13}'\overline{V}_2|) = \zeta_{13};$$

$$(|\overline{V}_{13}\overline{V}_2|, \ |\overline{V}_{13}'\overline{V}_2'|) = \zeta_{13}' \text{ auf } \bar{o}_{13},$$

$$(\bar{o}_2, \ |\overline{V}_2\overline{V}_2'|) = \zeta_2';$$

b) für reelle Nachbarpunktenpaare $\bar{A}$: (vergleiche Fig. 30.)

Das gemeinschaftliche Doppelelementenpaar $\zeta_{13}\zeta_{13}'$ der auf $\bar{o}_{13}$ coaxialen Involutionen, welche durch die Hauptpunkte $\bar{O}_{13}\bar{O}_2$ einerseits und durch die Nachbarpunkte $\bar{A}_{13}\bar{A}_{13}'$ andererseits bestimmt sind, erhält man analog, wie in (83). Anders verhält es sich mit dem auf der Hauptlinie $\bar{o}_2$ vorkommenden Punktenpaare $\zeta_2\zeta_2'$, von welchem der Punkt ζ_2 mit $\bar{O}_{13}$ coincidirt, wegen der Eigenschaft des letzteren als Coincidenzpunkt. Diese Eigenschaft begründet auf $\bar{o}_2$ die Harmonität:

$$(\bar{A}_2\bar{A}_2', \ \bar{O}_{13}\zeta_2') = -1,$$

woraus also für beide Fälle die Verbindungslinien:

$$|\zeta_{13}'\zeta_2'| = p_4; \quad |\zeta_{13}\zeta_2'| = p_2$$

erhalten werden. Es resultirt nach diesem Ergebnisse der Satz: „Eine ebene Curve 4ter Ordnung mit einem Contactelemente hat höchstens zwei eigentliche Doppeltangenten.“

Selbstverständlich treffen die beiden p-Sehnen den Grundkegelschnitt in den Bildern $\bar{B}\bar{B}'$ der Berührungspunktenpaare BB', welche jede Doppeltangente Δ der Curve mit ihr gemeinsam besitzt.

Zusatz. Es könnte aus irgend welchen Gründen der Fall vorkommen, dass (Fig. 30.) das Punktenpaar $\zeta_{13}\zeta_{13}'$ der Coincidenzlinie $\bar{o}_{13}$ unbekannt ist. Da der auf $\bar{o}_2$ befindliche ζ_2'-Punkt vermöge der oben angeführten Harmonität jederzeit sehr einfach bestimmt wird, so kann man das Sehnenpaar p_2p_4 auch auf andere Weise, als vorhin gezeigt worden ist, erhalten, wenn wir uns der Anmerkung in Art. (97) und des

Art. (100) erinnern. Der dabei einzuschlagende Weg wäre der folgende.

Der Punkt ζ_2' ist das Centrum einer Strahleninvolution, deren Doppelelemente die gesuchten $p_2 p_4$-Sehnen sind. Ein beliebiger Strahl p dieser Involution trifft den Grundkegelschnitt k in einem Punktenpaare $\overline{X}\overline{X}'$, von welchem wir die Bilder XX' auf der Contactcurve C_6^4 aufsuchen. Die Verbindungsgerade $|XX'| \equiv g$ schneidet die Curve nochmals in einem zweiten Punktenpaare YY', dessen Transformation in das System des Grundkegelschnitts uns ein Paar Punkte $\overline{Y}\overline{Y}'$ gibt, die auf dem zu p conjugirten Strahle p' der Involution ζ_2' liegen werden. Wir sehen also, dass man stets zwei beliebige Paare conjugirter pp'-Strahlen der ζ_2'-Involution zu erzeugen im Stande ist, womit auf bekannte Weise die Doppelstrahlen $p_2 p_4$ gefunden werden können, welche den Grundkegelschnitt reell oder imaginär in den Bildern $\overline{B}\overline{B}'$ der Berührpunkte einer der beiden Curven-Doppeltangenten $\varDelta_2 \varDelta_4$ treffen, je nachdem diese selbst eigentliche oder isolirte sind.

199. Bestimmung und Classification der Curve. Bei Angabe des Contact- und des Doppelpunktes sind durch ersteren nach (193) sechs und durch letzteren (4) drei Elemente gegeben. Da zur Bestimmung einer Plancurve 4ter Ordnung (65) 14 Elemente notwendig sind, so erübrigen noch fünf, indem die beiden mehrfachen Punkte neun Elemente dar-

stellen. Diese fünf Elemente in das System $\overline{\Sigma}$ abgebildet, bestimmen den Grundkegelschnitt ausreichend, wodurch die Contactcurve vervollständigt werden kann.

Nach (8) ist die Plancurve: $4(4-1) = 12^{\text{ter}}$ Classe. In Folge der zwei Singularpunkte $O_2 O_{13}$ ist sie wie bisher nach (8) von der Classe: $12 - 2 \cdot 3 = 6$ und also unicursal. Symbol: $C_6^{\prime 4}$.

Wird der Grundkegelschnitt von einer der beiden Hauptlinien $\bar{o}_{13} \bar{o}_2$ berührt, so wird der entsprechende mehrfache Punkt der Plancurve ein Rückkehrpunkt. Ist die Hauptlinie $\bar{o}_2$ Tangente des Grundkegelschnitts im Punkte $\bar{A}_2$, dann ist der Doppelpunkt O_2 der Plancurve der Rückkehrpunkt derselben; die Plancurve bildet eine „Spitze“ (6) d. h. ihre beiden Curvenäste liegen zu beiden Seiten der Rückkehrtangente. Die letztere ist die durch O_2 zu dem Strahle $|\overline{O_2 A_2}|$ gehende Parallelgerade. Berührt hingegen die Hauptlinie $\bar{o}_{13} \equiv o_{13}$ den Grundkegelschnitt in $\bar{A}_{13}$, so ist O_{13} ein Rückkehrpunkt der Plancurve, welche in ihm einen „Schnabel“ erzeugt, d. h. ihre beiden Curvenäste liegen auf einer und derselben Seite der Rückkehrtangente, welche diesfalls mit der Hauptkreistangente o_2 des Punktes O_{13} zusammenfällt. Durch nur einen Rückkehrpunkt wird die Classenzahl der Plancurve um eine Einheit vermindert (9). Demnach symbolisiren sich die betreffenden beiden Plancurven 4ter Ordnung als: $C_5^{\prime 4}$ und in Combination für beide Fälle als: $C_4^{\prime 4}$.

§ 30. Inflexionen und absolute Elementensysteme.

200. Die Frage nach den Inflexionselementen einer Plancurve 4[ter] Ordnung mit Contact kann nur wieder durch Abbildung auf den Grundkegelschnitt ausgetragen werden.

Das Bild einer Wendetangente der Curve ist ein Kegelschnitt, welcher die Hauptlinie $\bar{o}_2$ mit dem Hauptkreise im Punkte $\bar{\bar{O}}_{13}$ zur gemeinsamen Tangente hat und ausser dem Hauptpunkte $\bar{O}_2$ noch einen zweiten Punkt (das Bild des ∞ fernen Punktes der Wendetangente) auf dem Hauptkreise besitzt. Dieser Kegelschnitt osculirt somit den Grundkegelschnitt in dem Bilde des Inflexionspunktes und er schneidet den Grundkegelschnitt in dem Bilde des Tangentialpunktes der Wendetangente auf der Plancurve. Die eingangs gestellte Frage findet mithin ihre Beantwortung nach der Anzahl der eben charakterisirten osculirenden Kegelschnitte. Es gibt wieder sechs Kegelschnitte, welche der Aufgabe genügen können; somit besitzt auch eine Plancurve C_6^4 mit Contact höchstens sechs Inflexionen; von diesen sind mindestens zwei imaginär.

201. Zur Festsetzung der Inflexionselemente der vorliegenden Contactcurve C_6^4 bedienen wir uns am einfachsten der Directionscurve (102) des absoluten symmetrischen Systems der Tangentialpunkte. Diese Curve ist bekanntlich Enveloppe der $\bar{x}$-Geraden, welche die Verbindungslinien der Bilder der einzelnen Tan-

gentialpunktenpaare sind. Die Construction der $\bar{x}$-Geraden geschieht nach der Anleitung in (196).

Die auf diese Weise in Figur 33. Taf. I. erzeugte Directionscurve des Systems ist nach (108) vom Symbole: D_4^6. Sie besitzt die Hauptlinie $\bar{o}_{13}$ als Singular-Tangente, in der vier einfache Elemente zusammenfallen, und enthält weiter die Hauptlinie $\bar{o}_2$ als Doppeltangente. Allein auf der $\bar{o}_{13}$ vereinigen sich die beiden Berührpunktenpaare in dem einzigen Hauptpunkte O_2, welcher sich deshalb als Contactelement dieser Curve charakterisirt. Mithin ist die Directionscurve D_4^6 ebenfalls so wie die Plancurve C_6^4 eine Contactcurve. Die Berührelemente $\varphi_2\varphi_2''$ der Doppeltangente $\bar{o}_2$ resultiren nach (105), wenn man das Verzweigungspaar $\overline{V}_2 V_2'$ aus dem Hauptpunkte $\overline{O}_{13}$ auf den Grundkegelschnitt projicirt, so schneiden die Tangenten, welche in diesen Projectionspunkten an den Grundkegelschnitt gezogen werden, auf der Hauptlinie $\bar{o}_2$ die gefragten Punkte aus.

Ausser den angeführten beiden enthält die Directionscurve D_4^6 keine mehrfachen Tangenten; wohl aber kann sie neben dem Contactknoten $\overline{O}_2$ noch Doppel- und Rückkehrpunkte besitzen. Keinesfalls kommen ihr Inflexionselemente zu.

202. Nach dem Satze (117) links sind die gemeinschaftlichen Schnittpunkte T zwischen Directionscurve D_4^6 und Grundkegelschnitt k die Bilder der Tangentialpunkte T der Inflexionstangenten, und die Berühr-

linien in diesen Punkten an die Directionscurve D_4^6 treffen den Grundkegelschnitt in den Bildern $\bar{J}$ der Wendepunkte J auf der Plancurve C_6^4, deren es nach oben höchstens sechs gibt, von denen zwei stets imaginär sind, die vier übrigen aber in einem oder zwei Paaren dann imaginär werden können, wenn die Curve C_6^4 nur Doppelpunkte besitzt. Es kann aber auch vorkommen, dass die dann allerdings in ihrer Classe degenerirte Contactcurve 4ter Ordnung bloss einen einzigen Inflexionspunkt enthält, was immer der Fall ist, sobald sie einen oder zwei Rückkehrpunkte hat, wie weiter unten gezeigt werden soll.

203. Construirt man nach (116) die Polare der Directionscurve D_4^6, indem man in Figur 33. (s. Taf. I.) einfach die Pole der $\bar{x}$-Geraden bezüglich des Grundkegelschnitts k festsetzt, so ist diese dual der ersteren und vom Symbole D_6^4. Diese Directionscurve wird demnach auch wieder eine Contactcurve sein müssen, deren Berührungsknoten der Pol $\bar{\Omega}_{13}$ der Hauptlinie $\bar{o}_{13}$ und deren Doppelpunkt der Pol $\bar{\Omega}_2$ der Doppeltangente $\bar{o}_2$ der Curve D_4^6 bezugs des Grundkegelschnitts ist. Die Tangente des Contactpunktes ist dann offenbar die Polare $\bar{V}_2\bar{V}_2'$ des Hauptpunktes O_2, während sich die Doppelpunkttangenten ergeben, wenn man (106) das Verzweigungspunktenpaar $\bar{V}_2\bar{V}_2'$ aus dem Hauptpunkte $\bar{O}_{13}$ auf den Grundkegelschnitt projicirt und die Projectionspunkte mit dem Doppelpunkte $\bar{\Omega}_2$ verbindet.

Den vorkommenden Doppelpunkten der Curve

D_4^6 entsprechen polar auf der Curve D_6^4 ebensoviele Doppeltangenten und den Rückkehrpunkten der D_4^6, die Wendepunkte der D_6^4. Ferner ist zu bemerken, dass die Directionscurve D_6^4 so viele Asymptotenpunkte besitzen muss, als man von dem Mittelpunkte des Grundkegelschnitts an die Curve D_4^6 Tangenten ziehen kann, wie leicht einzusehen ist, also, weil diese 4ter Classe ist, höchstens vier.

204. Jede gemeinschaftliche Tangente zwischen der Polarcurve D_6^4 und dem Grundkegelschnitte berührt diesen nach dem Satze (117) rechts in dem Bilde τ des Tangentialpunktes T der betreffenden Wendetangente auf der Plancurve C_6^4; von dem Berührpunkte τ einer solchen Tangente zieht an den Grundkegelschnitt eine andere Tangente, deren Berührpunkt $\bar{J}$ uns das Bild des zugehörigen Inflexionspunktes J der Plancurve C_6^4 vorstellt.

205. Wir kehren zur Directionscurve D_4^6 zurück. Wenn der Grundkegelschnitt eine der Hauptlinien $\bar{o}_{13}\bar{o}_2$ berührt, so degenerirt die Directionscurve jedesmal in eine D_3^4; während also die Plancurve C_6^4 nach (199) nur die Classe vermindert, findet dieses bei der Directionscurve D_4^6 in Ordnung und Classe statt. Die Curve D_3^4 besitzt dann die betreffende Hauptlinie zur Doppeltangente und enthält nur eine Spitze; die andere Hauptlinie bildet eine einfache Tangente. Hier muss jedoch unterschieden werden, welche der beiden Ge-

raden $\bar{o}_{13}\bar{o}_2$ der Grundkegelschnitt zur Tangente hat. Berührt nämlich die Hauptlinie $\bar{o}_2$ den Grundkegelschnitt, so ist sie, wie gesagt, Doppeltangente und ihre beiden Berührpunkte $\varphi_2\varphi_2'$ erhält man nach dem Constructionsgesetze (195) wie in (201), indem man die Verzweigungspunkte $\overline{V}_2\overline{V}_2'$ aus $\bar{O}_{13}$ auf den Kegelschnitt projicirt, wo die Tangenten dieser Projectionspunkte auf $\bar{o}_2$ die gefragten Berührelemente $\varphi_2\varphi_2'$ ausschneiden. Der Punkt $\bar{O}_2$ ist, wie eine einfache Ueberlegung weiset, Berührpunkt für die einfache Tangente $\bar{o}_{13}$. Ist aber die Hauptlinie $\bar{o}_{13}$ Tangente in dem Punkte $\overline{V}_{123}$ des Grundkegelschnitts, dann ist sie die Doppeltangente der Directionscurve D_3^4 und ihre Berührungselemente sind sowohl der Punkt $\bar{O}_2$ wie auch $\overline{V}_{123}$. Den Berührpunkt der einfachen Tangente $\bar{o}_2$ erhält man wieder als den Schnittpunkt derjenigen Grundkegelschnittstangente auf $\bar{o}_2$, welche in dem Projectionspunkte des einen $\overline{V}_2$-Punktes mittelst des Strahles aus $\bar{O}_{13}$ erhalten wird. Der Grundkegelschnitt osculirt die Curve D_3^4 in $\overline{V}_{123}$. Im ersteren Falle, wo $\bar{o}_2$ Tangente des Grundkegelschnitts ist, gibt es auf der Bild-Plancurve 4ter Ordnung vier, mindestens aber zwei reelle Inflexionspunkte; im letzteren Falle, wo $\bar{o}_{13}$ den Grundkegelschnitt tangirt und dieser die D_3^4 in $\overline{V}_{123}$ osculirt, wegen dieser Osculation nur mehr drei reelle Inflexionen, oder es wird auf der Plancurve nur eine einzige Inflexion stattfinden. In jedem dieser beiden Fälle aber degenerirt die Classe der Plancurve C_6^4 um eine Einheit, so dass sie das Symbol: C_5^4 besitzt.

§ 31. Die Contactcurve C_3^4.

206. Von Interesse stellt sich jener Fall dar, wobei (Fig. 34, s. Taf. I.) die beiden Hauptlinien $\bar{o}_{13}\bar{o}_2$ gleichzeitig den Grundkegelschnitt k tangiren. Das Bild des letzteren gibt eine ebene Curve 4ter Ordnung mit zwei Rückkehrpunkten, deren einer in $O_{13}(\equiv \bar{O}_2)$ einen Schnabel (6) und der andere in $O_2 \equiv \bar{O}_{13}$ eine Spitze dieser Curve formirt, wobei die Curve dem Auge nach ihren eigentlichen Charakter als „Contactcurve" verliert, weil im Schnabel O_{13} gewissermassen zwei Doppelpunkte in Coincidenz sind. Die Classe degenerirt um zwei Einheiten; Symbol: C_4^4. Folgendes ist zu bemerken:

207. Verzweigungselemente. Die Hauptlinie $\bar{o}_{13}$ tangirt den Grundkegelschnitt in einem Punkte, welcher ersichtlich die Berührpunkte jener Tangenten der auf dieser Hauptlinie gelegenen Punkte $\bar{O}_{13}\bar{O}_2$ vereinigt, weshalb wir diesen gemeinschaftlichen Berührpunkt mit $\bar{V}_{123}$ bezeichnet haben. Aus demselben Grunde muss der Berührpunkt der Hauptlinie $\bar{o}_2$ mit $\bar{V}_{13}'$ bezeichnet werden. Die Punkte $\bar{V}_{123}\bar{V}_{13}'$ bilden bekanntlich Verzweigungselemente, deren Bilder sich in den beiden Rückkehrpunkten $O_2 O_{13}$ vereinigen. Ausserdem gibt es noch ein einfaches Verzweigungselement $\bar{V}_2'$ auf dem Grundkegelschnitt, welches durch die aus $\bar{O}_2$ zum andern Male ziehende Tangente entsteht. Das Bild V_2' des Punktes $\bar{V}_2'$ wird nach dem allgemeinen Constructionsgesetz (192) bestimmt, so dass also der nach V_2' ziehende Strahl des Doppelpunktes O_2 für

die Plancurve C_4^4 die einzige vorkommende Verzweigungstangente ist.

208. Mehrfache Tangenten sind zunächst zwei vorhanden: Die Schnabeltangente in O_{13}, welche nach (199) die Hauptlinie o_2 ist, und die Spitzentangente d_2 in O_2, deren Construction ebenfalls nach (199) geschieht, indem sie die in O_2 zu dem Strahle $|\overline{O}_2\overline{V}_{13}'|$ parallele Gerade ist. Den Tangentialpunkt R dieser letzteren findet man als das Bild desjenigen Punktes $\overline{R}$, den man erhält, wenn der Verzweigungspunkt $\overline{V}_{13}'$ aus dem Hauptpunkte $\overline{O}_2$ auf den Grundkegelschnitt projicirt wird. Die Richtigkeit dessen wird sofort klar, wenn man die bezügliche Construction in (196) abermals dem nun vorliegenden Falle anpasst und modificirt, wobei sich ergeben wird, dass die hier erfolgende $\overline{x}$-Gerade sich mit der vorhin bezeichneten Verbindungslinie $|\overline{O}_2\overline{V}_{13}'$ identificirt, weshalb es nur einen einzigen Tangentialpunkt geben kann, da der O_2-Punkt in der Curve eine Spitze begreift.

Die Schnabeltangente o_2 in O_{13} vereinigt a priori vier Punktenelemente der C_4^4, weshalb sie keinen andern Curvenpunkt aufweisen wird, was man übrigens auch ohne Schwierigkeit am Grundkegelschnitt k studiren kann.

209. Ausser den beiden bezeichneten mehrfachen Tangenten gibt es auf der Plancurve C_4^4 nur noch eine einzige Inflexionstangente i, indem sich die drei restlichen, von rechtswegen noch vorkommenden, in der Schnabeltangente o_2 vereinigen, wie aus dem Nach-



stehenden zu ersehen sein wird. Die Construction dieser Wendetangente i werden wir, wie in den vorhergegangenen Fällen, mit Hilfe des absoluten Systems der Tangentialpunkte auf der Curve ausführen. Die $\bar{x}$-Geraden (196) umhüllen die Directionscurve des auf den Grundkegelschnitt abgebildeten Systems der Tangentialpunktenpaare. Dieses letztere ist in dem vorliegenden Falle ein symmetrisches Elementensystem 2[ten] Grades.

Nach (99) ist die Directionscurve dieses Systems ein Kegelschnitt D^2. Dieser Directionskegelschnitt zeigt bemerkenswerthe Eigenschaften. Vor Allem ist nach dem Vorhergegangenen begreiflich, dass die Hauptlinien $\bar{o}_{13}\bar{o}_2$ Tangenten desselben bilden und dass er die Hauptlinie $\bar{o}_{13}$ in dem dreifachen Verzweigungspunkte $\bar{V}_{123}$ des Grundkegelschnitts berühren muss, weshalb sich dieser Punkt als ein Osculationselement herausstellt, so dass man sagen kann: Der Directionskegelschnitt D^2 osculirt den Grundkegelschnitt im Punkte $\bar{V}_{123}$ und die Hauptlinie $\bar{o}_{13}$ ist die Osculationstangente.

Der Berührpunkt $M(\equiv \varphi_2)$ des Kegelschnitts D^2 auf der Hauptlinie o_2 wird nach (205) als Schnitt mit jener Tangente des Grundkegelschnitts erhalten, die man in dem Projectionspunkte $\overline{W}$ des aus $\bar{O}_{13}$ durch das Verzweigungselement $\bar{V}_2'$ gezogenen Strahles errichtet. Dabei sei auf folgende Beziehungen hingewiesen. Der Strahl $|\bar{O}_2\bar{V}_{13}'|$ bildet, wie oben bemerkt ist, ein Element des $\bar{x}$-Geradensystems, aus welchem Grunde er Tangente des Kegelschnitts D^2 ist; er trifft den Grundkegelschnitt in einem Punkte $\bar{R}$,

welcher nach (208) das Bild des Tangentialpunktes der Spitzentangente in O_2 auf der Plancurve C_4^4 ist. Unterwirft man diesen $\bar{R}$-Punkt der Construction (196), so ergibt sich Nachstehendes: Die Strahlen $|\bar{O}_2\bar{R}|$, $|\bar{O}_{13}\bar{R}|$ schneiden auf dem Grundkegelschnitt das Punktenpaar $\overline{V}_{13}'\bar{Z}$ aus; die Tangente in $\bar{Z}$ giebt auf $\bar{o}_2$ den Punkt N und die Verbindungslinie $|\overline{V}_{13}'\bar{Z}|$ auf $\bar{o}_{13}$ den Punkt S. Die Gerade $|\overline{NS}|$ ist ein Element des $\bar{x}$-Systems und also Tangente des Directionskegelschnitts. Der Berührpunkt D' der Tangente $|NS|$ folgt als Schnitt mit dem Strahle $|\bar{O}_{13}\overline{V}_2'|$, welcher Strahl gleichzeitig auf der Tangente $|\bar{O}_2\overline{V}_{13}'|$ den zugehörigen Berührpunkt D ausschneidet. Nun halte man fest, dass N der Pol der Geraden $|\overline{V}_{13}'\bar{Z}|$ ist und dass die Tangente $|M\overline{W}|$ des Grundkegelschnitts durch den S-Punkt ziehen muss. Hieraus erkennt man auf der Hauptlinie $\bar{o}_2$ die Punktenharmonität: $(\bar{O}_{13}M, \overline{V}_{13}'N) = -1$ und im Punkte S den harmonischen Strahlenbüschel $S(\ddot{O}_{13}M, \overline{V}_{13}'N) = -1$.

Zieht man die Verbindungslinie $|\ddot{O}_2N|$, so trifft diese die Gerade $|\overline{V}_{13}'\bar{Z}|$ in einem Punkte P, welch' letzterer gleichzeitig als conjugirter Pol des Punktes N bezüglich des Grundkegelschnitts erscheint und somit durch ihn sowohl die Gerade $|DD'|$ als auch die Linie $|\overline{V}_{123}M|$ ziehen müssen.

Der harmonische Strahlenbüschel S schneidet auf dem Strahle $|\bar{O}_{13}\overline{V}_2'|$ perspectivisch die **Punktenharmonität** $(\bar{O}_{13}\overline{W}, PD') = -1$ aus; ebenso **wird leicht** erkannt, dass in N ein **Strahlenbüschel**

welches auf der Hauptlinie $\bar{o}_{13}$ eine Punktenharmonität $(\bar{O}_{13}U, \bar{V}_{123}S) = -1$ hervorbringt, in welcher das Element U durch die Grundkegelschnittstangente $|\bar{Z}N|$ erzeugt wurde.

210. Der Directionskegelschnitt D^2 und der Grundkegelschnitt k haben bekanntlich ausser dem Osculationspunkte $\bar{V}_{123}$ noch einen gemeinsamen Schnittpunkt $\bar{T}$. Die Construction desselben unter den gegebenen Bedingungen ist bekannt. Darnach braucht man nur etwa das Punktenpaar DD' aus $\bar{V}_{123}$ auf den Grundkegelschnitt nach $\bar{D}_{123}\bar{D}_{123}'$ zu projiciren, wo dann die Verbindungslinie $|\bar{D}_{123}\bar{D}_{123}'|$ auf $|DD'|$ einen Punkt H erzeugt, welcher mit $\bar{V}_{123}$ verbunden, auf dem Grundkegelschnitt den Punkt $\bar{T}$ gibt.

Noch einfacher gelangt man zum Ziele: wenn man die Tangente $|WM|$ verwendet. Diese verschneidet sich mit dem Strahle $|\bar{O}_{13}\bar{R}|$ in einem Punkte M'. Projicirt man das Punktenpaar MM' wieder aus $\bar{V}_{123}$ nach $\bar{M}_{123}\bar{M}_{123}'$ auf den Grundkegelschnitt, so schneidet die Verbindungslinie $|\bar{M}_{123}\bar{M}_{123}'|$ die Tangente $|\bar{W}M|$ in einem Punkte O, der auf der Geraden $|\bar{V}_{123}\bar{T}|$ liegt; oder: die Gerade $|\bar{V}_{123}\bar{T}|$ geht durch den Schnitt:

$$(|\bar{W}M|, |\bar{O}_2\bar{V}_{13}'|) = O;$$

oder: die Gerade $|\bar{V}_{123}\bar{T}|$ zieht durch den Schnitt:

$$(|SN|, |\bar{O}_2\bar{V}_2'|) = \bar{O}';$$

oder endlich am einfachsten: die Verbindungslinie $|UP|$ trifft den Grundkegelschnitt direct in dem verlangten Schnittpunkte $\bar{T}$.

211. Die vorstehenden Constructionsmethoden des Punktes $\overline{T}$ ergeben eine lineare Ermittlung des Bildes von dem Tangentialpunkte T der in unserem vorliegenden Falle einzigen Wendetangente der Curve C_4^4 mit zwei Rückkehrpunkten. Die Tangente des $\overline{T}$-Punktes an den Directionskegelschnitt D^2 schneidet bekanntlich auf dem Grundkegelschnitt das Bild $\overline{J}$ des betreffenden Inflexionspunktes J der Plancurve C_4^4 aus.

Behufs der linearen Ermittlung des einzigen Inflexionspunktenbildes $\overline{J}$ auf dem Grundkegelschnitte verwenden wir folgende Construction: Die Verbindungslinie $|\overline{T}M|$ schneidet die Hauptseite $\bar{o}_{13}$ in G; die Linie $|\overline{V}_{123}O|$ trifft die Hauptseite $\bar{o}_2$ in einem Punkte F; man suche den Schnitt:

$$(|FG|,\ |\overline{V}_{123}M|) = K.$$

Die Gerade $|K\overline{T}|$ ist die gesuchte Tangente in $\overline{T}$ und erzeugt auf dem Grundkegelschnitt, weil sie ein Element des $\bar{x}$-Sekantensystems singulärer Gattung ist, den verlangten $\overline{J}$-Punkt, der dann nach der Grundconstruction nach J in die C_4^4 übertragen wird.

§ 32. Form und Gestalt einer Contactcurve.

212. Die gestaltlichen Verhältnisse einer Contactcurve 4ter Ordnung sind jedenfalls denen gleichzuhalten, welche überhaupt in unicursalen Curven mit drei Doppelpunkten stattfinden, so dass also hier keine wesentlichen Verschiedenheiten vorkommen werden.

Immer und hauptsächlich sind die Asymptotenelemente charakteristisch für den Verlauf und die Form einer Curve; diese aber hängen wieder zusammen mit den gemeinschaftlichen Schnittpunkten zwischen dem Hauptkreise $\varkappa$ und dem bezüglichen Grundkegelschnitte k, und wir erkennen leicht, dass im vorliegenden Falle, wie gesagt, keine wesentlichen Abweichungen von dem allgemeineren Falle erfolgen können. Es wird demgemäss eine Contactcurve C_6^4 höchstenfalls vier Asymptotenelemente aufweisen, die sich nach (76) in den $\bar{U}$-Punkten des Hauptkreises abbilden.

Von maassgebendem Einflusse sowohl auf den Charakter als auch auf den Verlauf einer Contactcurve ist der Grundkegelschnitt insbesondre dann, wenn er ein Kreis ist, weil in diesem Falle die imaginären Kreispunkte auf $g\infty$ der Curve eigen sind und sie also, wie in (80), eine „Kreisverwandte" ist. Als solche kann sie nicht mehr als zwei reelle Asymptotenelemente haben, und wenn der betreffende Grundkreis k mit dem Hauptkreise $\varkappa$ keinen Punkt gemeinschaftlich hat, so besitzt auch die Contactcurve kein reelles Asymptotenelement und ist eine ganz und gar im Endlichen in sich zurückkehrende Curve. Wir nennen sie circular. (80.)

213. Hält man sich die Beziehung (212) vor Augen, so wird eine Contactcurve C_6^4, sobald der Mittelpunkt des Grundkegelschnitts k auf der Doppelcoincidenz-Hauptlinie $\bar{o}_{13}$ ($\equiv o_{13}$) liegt, symmetrisch zu dieser

letzteren Geraden sein. Besonderes Interesse erweckt die Eigenschaft der Symmetrie, wenn die C_6^4 circular und also ihr Bild ein Kreis ist. Hierbei werden für den Verlauf der Curve jene im Endlichen ziehenden Verschlingungen der Curve charakteristisch zu unterscheiden kommen, wo der Halbmesser des Grundkreises $k \lesseqgtr$ als jener des Hauptkreises $\varkappa$ wird, und wo endlich auch noch die Mittelpunkte dieser beiden Kreise zusammenfallen.

Die Speciallage des Grundkreises k, in der die Coincidenzlinie $\bar{o}_{13}$ eine Tangente an ihn ist, bedingt in O_{13} eine Schnabelspitze der Curve (vergl. (6) u. (199)), in welcher die Hauptlinie o_2 Tangente ist. Dieser O_{13}-Punkt vereinigt nach (206) zwei Doppelpunkte und die Curve hat das Symbol: C_5^4. Eine derartige Schnabelcurve C_5^4 besitzt nach (205) höchstens drei oder nur einen einzigen Inflexionspunkt J, wohl aber zwei Verzweigungselemente V, und zwar einen V-Punkt in Bezug des Hornpunktes O_{13} und den zweiten in Bezug des Doppelpunktes O_2. Die Constructionen eines J-Punktes werden nach früher anstandslos auszuführen sein.

Endlich wäre noch der Fall hervorzuheben, in welchem der Grundkreis k von den beiden Hauptlinien $\bar{o}_{13}$ ($\equiv o_{13}$), $\bar{o}_2$ gleichzeitig berührt wird. Das diesbetreffende Curvenerzeugniss der Beziehung (§ 31.) besitzt jetzt wieder im Hauptpunkte O_{13} eine Schnabel- oder Hornspitze, deren Tangente die Hauptlinie o_2 ist, und weiter eine einfache Spitze im Punkte O_2. Das Symbol der Kreisverwandten ist demgemäss: C_4^4. Die

Spitzentangente d_2 im O_2-Punkte sowie ihren Tangentialpunkt R bekommt man nach (208).

In Bezug der Verzweigungen einer circularen C_4^4 ist wesentlich nichts Neues zu sagen, was nicht schon in (§ 31.) hierüber bemerkt ist.

Treffen sich Grund- und Hauptkreis, so kann es nur zwei $\overline{U}$-Punkte, und also wie vorhin in (212) auch nur zwei Asymptoten in der circularen C_4^4 geben, deren Ermittlung leicht ist. Haben die beiden Kreise imaginäre $\overline{\overline{U}}$-Punkte, so ist die Spitzencurve allseitig geschlossen und ohne Asymptoten. Auch die zuletzt betrachtete C_4^4 hat so wie eventuell die oben (205) bezeichnete C_5^4 nur eine einzige Inflexion und keinerlei Doppeltangenten.

Zehnter Abschnitt.

Erzeugung durch Inversion.

§ 33. Abbildung und Constructionsbeziehungen.

214. Eine Curve 4ter Ordnung vom Geschlechte $p = o$ kann involutorisch einem Kegelschnitte sein, welche Eigenschaft wir durch die Grundsätze der Inversion in (52) auseinandergesetzt haben. Für die Erzeugung einer C_6^4 sind die drei Doppelpunkte $O_1 O_2 O_3 \equiv \overline{O}_1 \overline{O}_3 \overline{O}_2$, von denen wir $O_1 \equiv \overline{O}_1$ als das Centrum der Inversion wählen, dann der Inversionskegelschnitt $\varkappa$, welcher von den Hauptlinien $o_2 o_3 \equiv \overline{o}_3 \overline{o}_2$ in den Punkten $O_3 O_2 \equiv \overline{O}_2 \overline{O}_3$ berührt wird, und ausserdem fünf Punktenelemente X der Curve gegeben.

Diese Punktenangaben umfassen für die C_6^4 zusammen vierzehn Elemente, was zu ihrer Bestimmung bekanntlich genügend ist. Denn die den fünf X-Punkten inversen $\bar{X}$-Punkte bestimmen den Grundkegelschnitt k, welcher die Curve C_6^4 invers abbildet. (Fig. 35. s. Taf. II.)

Um einen $\bar{X}$-Punkt zu erhalten, werden wir den gegebenen X-Punkt durch Strahlen mit den Doppelpunkten $O_1 O_2 O_3$ verbinden, und haben dabei im Auge zu behalten, dass die beiden Punkte $X\bar{X}$ immer gleichzeitig auf einem Strahle des Centrums O_1 der Inversion liegen müssen. Die genannten Strahlen der beiden Doppelpunkte $O_2 O_3$ treffen den Inversionskegelschnitt $\varkappa$ in den Punkten $X_2 X_3$. Der fragliche $\bar{X}$-Punkt kann nun durch nachstehende Constructionen erfolgen:

$$(|O_1X|, |O_2X_3|) \equiv \bar{X}; \quad (|O_1X|, |O_3X_2|) \equiv \bar{X};$$
$$(|O_2X_3|, |O_3X_2|) \equiv \bar{X}.$$

215. Den Doppelpunkten $O_1 O_2 O_3$ der Curve C_6^4 liegen die Seiten $o_1 o_2 o_3$ $(\equiv \bar{o}_1 \bar{o}_3 \bar{o}_2)$ ihres Hauptdreiecks gegenüber. Die Seiten $\bar{o}_1 \bar{o}_2 \bar{o}_3$ werden in Punktenpaaren $\bar{A}\bar{A}'$ von dem Grundkegelschnitte k geschnitten, welche auch für die gegenwärtige Beziehung der Inversion einen Doppelpunkt der Curve in seinen unendlich nahe situirten Nachbarpunkten abbilden, weshalb wir ein solches Punktenpaar kurzweg wie bei früheren Gelegenheiten als „Nachbarpunkte“ bezeichnen. Wendet man die vorhin declarirte Grundconstruction für die Nachbarpunkte $\bar{A}\bar{A}'$ an, so zeigt sich deutlich die Eigenschaft der Punkte $O_1 O_2 O_3$ als singuläre Doppelelemente



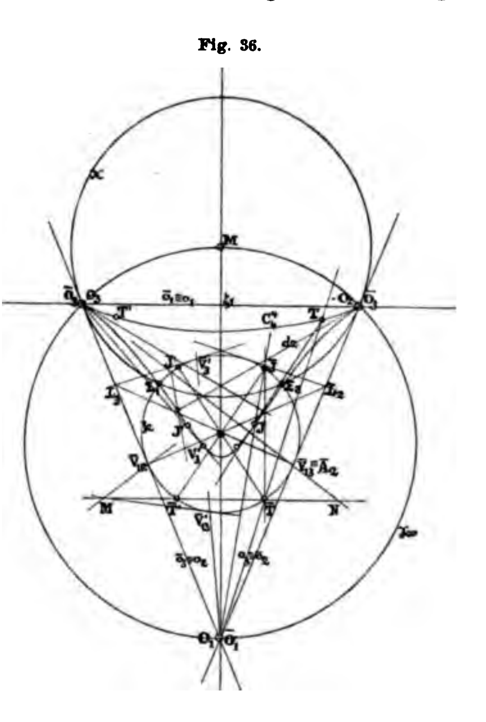
der Plancurve. Zugleich finden wir aber eine höchst einfache Construction des Doppelpunkttangentenpaares $d_1 d_1'$ dadurch, dass wir den Doppelpunkt $O_1 \equiv \bar{O}_1$ mit den Nachbarpunkten $\bar{A}_1 \bar{A}_1'$ auf der gegenüberliegenden Dreiecksseite $\bar{o}_1$ durch Gerade verbinden. Die Tangentenpaare in den Doppelpunkten $O_2 O_3$ bekommt man gleichfalls ohne Schwierigkeit. Die Dreiecksseite $\bar{o}_2 \equiv | \bar{O}_1 \bar{O}_3 |$ enthält mit dem Grundkegelschnitt k das Nachbarpunktenpaar $\bar{A}_2 \bar{A}_2'$; projiciren wir dessen Elemente aus $\bar{O}_2$ auf k, so sind die Verbindungslinien der betreffenden Projectionspunkte mit dem O_2-Punkte die Tangenten $d_2 d_2'$; ebenso sind Verbindungsstrahlen des O_3-Punktes mit jenen Projectionspunkten, die aus $\bar{O}_3$ mittelst des Paares $\bar{A}_3 \bar{A}_3'$ auf $\bar{o}_3$ am Grundkegelschnitt k entstehen, die Doppelpunktstangenten $d_3 d_3'$.

Aus den Doppelpunkten $O_1 O_2 O_3$ läuft je ein Paar Verzweigungstangenten vv' mit ihren Berührpunkten VV' an die Curve C_6^4. Die ihnen inversen Elemente sind die aus den Punkten $O_1 O_2 O_3$ an den Kegelschnitt k gezogenen Tangentenpaare $\bar{v}\bar{v}'$ mit ihren Berührpunkten $\bar{V}\bar{V}'$. Die Construction der Verzweigungselemente in der Curve C_6^4 basirt auf der Grundconstruction (51) und unterliegt gewiss keiner Schwierigkeit.

216. Berührt (Fig. 36) der Grundkegelschnitt k die Seite $\bar{o}_1$ des Dreiecks $\bar{O}_1 O_2 \bar{O}_3$ in einem $\bar{A}_1$-Punkte, so ist der gegenüberliegende O_1-Punkt für die Curve 4[ter] Ordnung eine Spitze und die Verbindungslinie $| O_1 \bar{A}_1 | \equiv d_1$

ist eine Rückkehrtangente. Wird aber der Grundkegelschnitt von einer der Seiten $\bar{o}_2\bar{o}_3$ in einem $\bar{A}_2$- resp. $\bar{A}_3$-Punkte tangirt, so bildet der in ihr liegende O_2- resp. O_3-Punkt für die Curve eine Spitze, und man findet z. B. die Rückkehrtangente d_2 als die Verbindungslinie des O_2-Punktes mit jenem Schnitte, welchen die Gerade $|\bar{O}_2\bar{A}_2|$ auf dem Inversionskegelschnitt $\varkappa$ hervorbringt. Hingegen ist der Tangentialpunkt der Spitzentangente d_2 das inverse Bild desjenigen Schnittes, den der Strahl $|\bar{O}_2\bar{A}_2|$ zum andern Male auf k hervorruft. Es werden also auch diesfalls die Classenzahlen der Curve um je eine Einheit herabgesetzt und die Charaktere C_5^4, C_4^4, C_3^4 entstehen, je nachdem 1, 2, 3 Seiten des Dreiecks $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ Tangenten des Grundkegelschnitts k sind.

Fig. 36.



Wird eine der Seiten $\bar{o}_2\bar{o}_3$ in reellen $\bar{A}\bar{A}'$-Punkten von k geschnitten, so ist der in ihr liegende Doppelpunkt O ein Knoten mit reellen Doppelpunktstangenten; ist aber dieses Punktenpaar imaginär, dann wird der

betreffende Singularpunkt zum Einsiedler mit imaginären Tangenten. Analoge Verhältnisse finden statt für das Inversionscentrum O_1, je nachdem das Punktenpaar $\bar{A}_1\bar{A}_1'$ auf der gegenüberliegenden Hauptseite o_1 reell oder imaginär vorhanden ist, wo nur die Vereinfachung hinzutritt, dass die Strahlen des O_1-Punktes nach den Punkten $\bar{A}_1\bar{A}_1'$ unmittelbar das Tangentenpaar d_1d_1' angeben, wie schon oben gezeigt wurde.

§ 34. **Das Kegelschnittsnetz.**

217. Die Inversion sämmtlicher Geraden g der Ebene bilden ein Kegelschnittsnetz, dessen Basispunkte $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ sind. Jedes Individuum γ dieses Netzes zieht durch den Pol G der betreffenden g-Geraden bezugs des Inversionskegelschnitts $\varkappa$, und hat mit dem Grundkegelschnitt vier Punkte Σ gemeinschaftlich, welche die Schnitte der g-Geraden mit der Curve C_6^4 abbilden, wodurch die Ordnung der letzteren erwiesen ist. Die Tangenten in den Punkten $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ für einen γ-Kegelschnitt erhält man folgendermassen. Im O_1-Punkte findet man die Tangente direct als Verbindungslinie desselben mit dem Schnittpunkte der Dreiecksseite $\bar{o}_1$ auf g. Die Seite $\bar{o}_2$ schneidet die g-Gerade in einem Punkte, den man aus $\bar{O}_2$ auf den Inversionskegelschnitt $\varkappa$ projicirt; die Verbindungslinie dieses Projectionspunktes mit $\bar{O}_3$ ist Tangente des letztern. Analog wird verfahren bei der Bestimmung der Tangente in $\bar{O}_2$, wo der durch die Dreiecksseite $\bar{o}_3$ auf g sich ergebende Schnittpunkt zur Anwendung gelangt.

In dem Netze ist (Fig. 36.) jener Kegelschnitt $\gamma\infty$ ausgezeichnet, welcher invers der Geraden $g\infty$ ist. Er ist mit dem Inversionskegelschnitt $\varkappa$ homothetisch, d. h. die Axenpaare dieser zwei Kegelschnitte laufen einander parallel und ihre Mittelpunkte liegen auf einem Strahle des Inversionscentrums O_1. Dieser Strahl ist conjugirt der Geraden $|O_2O_3| \equiv o_1$. Die Schnittpunkte $\overline{U}$, welche zwischen den beiden Kegelschnitten $k\gamma\infty$ stattfinden, bilden die Asymptotenpunkte der inversen Curve C_6^4 ab. Die Construction des Kegelschnitts $\gamma\infty$ gestaltet sich verhältnissmässig einfach, weil die nach einem beliebigen Punkte von $g\infty$ zielenden Strahlen parallel werden. Aus diesem Grunde wird auch die Tangente in $\ddot{O}_1$ der Linie $\bar{o}_1$ gleichlaufen, und weil $\gamma\infty$ den Mittelpunkt M des Inversionskegelschnitts $\varkappa$ als Pol der $g\infty$, wie vorhin bemerkt wurde, durchziehen muss, so ist die Gerade $|\overline{O_1M}|$ ein den beiden Kegelschnitten $\varkappa\gamma\infty$ gemeinschaftlicher Diameterstrahl, welcher, wie gesagt, der Richtung $\bar{o}_1$ conjugirt ist, weshalb auch die in M an $\gamma\infty$ gezogene Tangente gleichfalls der $\bar{o}_1$-Linie parallel geht.

Weil die Kegelschnitte $\varkappa\gamma\infty$ a priori die Punkte O_2O_3 gemeinschaftlich haben, so besitzen sie noch weiter zwei solche Punkte gemeinsam, und weil sie ferner ähnlich liegend, d. h. homothetisch sind, so können diese zwei letzteren Punkte nur die auf $g\infty$ befindlichen Asymptotenelemente der beiden Kegelschnitte sein, die reell sind, wenn beide Curven

Hyperbeln, die imaginär ausfallen, sobald dieselben Ellipsen sind, und die endlich in einem Punkte von $g\infty$ coincidiren, wenn $\varkappa\gamma\infty$ gleichzeitig Parabeln werden. Niemals kann demnach der Fall vorkommen, dass $\varkappa\gamma\infty$ Kegelschnitte verschiedener Art sind; insbesondere aber wird auch der Specialfall stattfinden: „Dass einer der Kegelschnitte $\varkappa\gamma\infty$ ein Kreis ist, wo dann auch der andere ein solcher sein muss, indem beide die imaginären Kreispunkte der Ebene perspectivisch gemein haben.“ Eine kurze Ueberlegung und die vorhin angegebene Beziehung wird endlich auch zu dem Schlusse leiten, dass der Mittelpunkt M des Inversionskegelschnitts $\varkappa$ ein Punkt des Kegelschnitts $\gamma\infty$ nothwendig sein muss, weil ja diesem Mittelpunkte involutorisch ein Punkt der unendlich fernen Geraden $g\infty$ sowie diese selbst polar zugeordnet ist.

218. Kennt man von einer Geraden g in der Curve C_6^4 zwei gemeinschaftliche Punkte XX', so lassen sich die zwei restlichen Schnittpunkte $X''X'''$ dieser beiden Gebilde nach der Construction in (61) folgend ermitteln. Wir suchen zunächst die inversen Bilder $\overline{X}\overline{X}'$ auf dem Grundkegelschnitt k auf; sodann projiciren wir die letzteren aus den drei Doppelpunkten $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ durch Strahlen auf den Grundkegelschnitt, wobei die Paare $\overline{X}_1\overline{X}_1'$, $\overline{X}_2\overline{X}_2'$, $\overline{X}_3\overline{X}_3'$ erhalten werden. Nun ergibt sich analog wie dort das Constructionsschema.:

$$(|\overline{X}_1\overline{X}_2'|,\ |\overline{X}_2\overline{X}_1'|) \equiv \xi_3 \text{ auf } \bar{o}_3,$$
$$(|\overline{X}_1\overline{X}_3'|,\ |\overline{X}_3\overline{X}_1'|) \equiv \xi_2 \text{ auf } \bar{o}_2,$$
$$(|\overline{X}_2\overline{X}_3'|,\ |\overline{X}_3\overline{X}_2'|) \equiv \xi_1 \text{ auf } \bar{o}_1.$$

Die Verbindungslinie $|\xi_1\xi_2\xi_3| \equiv \bar{x}$ schneidet den Grundkegelschnitt k in dem Punktenpaare $\overline{X}''\overline{X}'''$, dessen inverse Elemente $X''X'''$ nach der Grundconstruction aufgesucht werden.

219. Ganz ähnlich verhält es sich mit den Tangentialpunkten $X'X''$, welche eine in einem Punkte X zu ziehende Curventangente enthält, indem analog die betreffende Modification der Construction in (69) zur Anwendung gelangt. Wir werden demgemäss das inverse Bild $\overline{X}$ des Berührungspunktes X auf dem Grundkegelschnitt ermitteln, ihn aus den Punkten $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ nach $\overline{X}_1\overline{X}_2\overline{X}_3$ projiciren und sodann dem Constructionsschema folgen:

$$(|\overline{X}_1\overline{X}_2|,\ |\overline{O}_1\overline{O}_2|) \equiv \xi_3 \text{ auf } \bar{o}_3,$$
$$(|\overline{X}_1\overline{X}_3|,\ |\overline{O}_1\overline{O}_3|) \equiv \xi_2 \text{ auf } \bar{o}_2,$$
$$(|\overline{X}_2\overline{X}_3|,\ |\overline{O}_2\overline{O}_3|) \equiv \xi_1 \text{ auf } \bar{o}_1.$$

Auch hier wird wieder die Verbindungsgerade $|\xi_1\xi_2\xi_3| \equiv \bar{x}$ die fraglichen inversen Bilder $\overline{X}'\overline{X}''$ der beiden Tangentialpunkte $X'X''$ der in X gezogenen Curventangente auf dem Grundkegelschnitte k hervorbringen.

220. Nach den Ableitungen vorausgegangener Abschnitte wissen wir, dass in dem Fundamental-Kegelschnittsnetze $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ vier Individuen δ den Grund-

kegelschnitt k doppelt berühren und sechs Individuen ι osculiren. Den doppelt berührenden δ-Individuen entsprechen invers die vier Doppeltangenten Δ der Curve C_6^4 und den osculirenden ι-Individuen entsprechen in gleichem Sinne die sechs Inflexionstangenten i der Curve. Mit Hilfe speciell der p-Sehnen und ihrer $\overline{B}$-Punkte, deren Construction in (82) angezeigt ist, findet man die Doppeltangenten der Curve C_6^4. Da wir ferner im vorigen Artikel die Construction einer $\overline{x}$-Sekante des Grundkegelschnitts k in Erinnerung gebracht haben, diese aber die Basis für die Directionscurve des $\overline{x}$-Sekantensystems nach den Erklärungen in (104) bildet, nach welcher die Inflexionselemente J einer C_6^4 bestimmt erscheinen, so können wir uns mit dem Hinweis dessen, um weitläufige Wiederholungen zu vermeiden, begnügen, da die betreffenden Constructionen in der vorliegenden Beziehung sich nicht nur nicht compliciren, sondern vielmehr, wie schon aus den vorstehenden Betrachtungen hervorgeht, erheblich vereinfachen werden.

221. Einiges Interesse könnte die Frage nach den Punkten erwecken, welche die erzeugte Curve 4[ter] Ordnung mit dem Inversionskegelschnitt $\varkappa$ gemeinsam besitzt. In Beziehung dessen kommt zu bemerken, dass a priori die Doppelpunkte $O_2 O_3$ vier solcher Punkte repräsentiren. Geht man der punktenweisen Erzeugung der C_6^4 genau nach, so sieht man ohne Schwierigkeit, dass die zwischen den Kegelschnitten $k\varkappa$ gemeinschaftlichen

vier Σ-Schnittpunkte ebenfalls der C_6^4 angehören müssen. Da wir auf diese Art zusammen schon acht Punkte zählen, so ist klar, dass die C_6^4 ausser den genannten mit dem Inversionskegelschnitte $\varkappa$ keine anderen gemein haben kann.

Dass die gemeinsamen $\overline{U}$-Punkte der Kegelschnitte $k\gamma\infty$ die Asymptotenelemente der Curve perspectivisch invers abbilden, ist schon oben gesagt worden. Es könnte sich also höchstens noch um die Lage der Asymptoten u handeln, weil ihre Richtung durch die Verbindungslinien des Inversionscentrums O_1 mit den $\overline{U}$-Punkten unmittelbar angegeben ist. Da eine Asymptote zwei Tangentialpunkte R besitzt, diese aber nach der Construction (219) gefunden werden, wenn man den $\overline{U}$-Punkt, von dem die Sprache war, derselben unterzieht, so kann diese Aufgabe als erledigt angesehen werden.

222. Ist der Inversionskegelschnitt $\varkappa$ ein Kreis, so haben wir oben bemerkt, dass auch der Kegelschnitt $\gamma\infty$, welcher der unendlich weiten Geraden der Ebene invers ist, ein Kreis ist. Man sieht, dass in solchen Fällen das Doppelpunktsdreieck $O_1 O_2 O_3$ gleichschenklig ist, und wenn nun ein Grundkegelschnitt k eine solche Lage wie in Figur 36. hat, dass eine seiner Axen mit derjenigen Geraden $|O_1M|$ zusammenfällt, welche das Centrum der Inversion und den Mittelpunkt M von $\varkappa$ verbindet, so muss offenbar diese Gerade $|O_1M|$ eine Symmetrale der in-

versen Curve 4[ter] Ordnung, diese selbst also symmetrisch sein.

Ist der Grundkegelschnitt ebenfalls ein Kreis k, so wird die inverse C_6^4 circular oder „kreisverwandt", und weil die zwei Kreise $k\gamma\infty$ nur zwei reelle Punkte $\overline{U}$ gemein haben können, so besitzt auch (183) eine Kreisverwandte C_6^4 höchstens zwei reelle Asymptoten. Hierbei erweckt wieder jener besondere Fall unser Interesse, wobei das Dreiseit $o_1 o_2 o_3$ gleichseitig und dem Grundkreise k umschrieben ist. Denn diese Annahme führt abermals auf die Steiner'sche Hypocycloide, derer bereits in den Artikeln (60) und (185) gedacht wurde.

223. Wenn das Inversionscentrum O_1 im Innern des Inversionskegelschnitts $\varkappa$ liegend angenommen wird, so werden die zwei Doppelpunkte $O_2 O_3$ imaginär, ihr Träger o_1 jedoch wird stets eine reelle Gerade sein, weil ja derselbe die Polare von O_1 in Bezug $\varkappa$ ist. Ebenso wird das Centrum O_1 für die Inverse C_6^4 immer ein reeller Punkt sein müssen; er wird aber ein Knotenpunkt oder ein isolirter Doppelpunkt mit einem eigentlichen oder imaginären Tangentenpaare $d_1 d_1'$ in ihm sein können, je nachdem die Polare o_1 den Grundkegelschnitt k in einem reellen oder imaginären Nachbarpunktenpaare $\overline{A}_1 \dot{A}_1'$ schneidet. Rückkehrpunkt ist er, sobald der Grundkegelschnitt k, wie schon oben gesagt wurde, von der Polare o_1 berührt wird. Obgleich wir Curven mit zwei imaginären

Doppelpunkten erst im folgenden Abschnitte betrachten, so sei dennoch schon hier darauf aufmerksam gemacht, dass man dieselben durch unsern Fall der Inversion auch zur Erzeugung bringen kann, wenn wir die fundamentale Eigenschaft derselben als involutorische Gebilde eines Grundkegelschnitts k vor Augen halten, indem je zwei inverse Punkte $X\overline{X}$, die auf einem Strahle des Centrums der Inversion liegen, durch den Kegelschnitt $\varkappa$ harmonisch getrennt erscheinen, wie in (52) vorausgesetzt worden ist.

Elfter Abschnitt.

Curven C_6^4 mit imaginären Doppelpunkten.

§ 35. Erzeugung und Abbildung.

224. Da imaginäre Elemente in der Geometrie immer paarweise auftreten, so ist es möglich, dass eine unicursale Plancurve 4ter Ordnung zwei imaginäre Doppelpunkte zählt (66), während der dritte Doppelpunkt ein reelles Element vorstellt. Dass der reelle Doppelpunkt alle drei Gattungen, nämlich Knoten, Einsiedler und Spitzenpunkt nacheinander vorstellen wird können, ist selbstverständlich und wir werden ja diese Fälle im Folgenden zu behandeln haben. Dass aber die imaginären Doppelpunkte einer Curve 4ter Ordnung nur als isolirte Elemente aufzufassen sind, wobei sie wohl auch als Spitzenpunkte gedacht werden können, wird ebenfalls späterhin zu

erklären sein. Das Wichtigste über die derartig charakteristischen Curven C_6^4 sei in den nächsten Untersuchungen angemerkt.

225. Für die Erzeugung bedienen wir uns der Beziehungen, wie sie insbesondere in dem Satze (165) zum Ausdrucke gelangen, indem wir dessen Interpretation für den vorgelegten Fall entsprechend zu modificiren haben werden. Diesbezüglich ist zu bedenken, dass das dort vorausgesetzte reelle Doppelpunktsdreieck $O_1O_2O_3$ nur mehr aus dem jetzt einzigen reellen Doppelpunkte O und der ihm gegenüberliegenden Seite o, welche der Träger des Paares imaginärer Doppelpunkte der Curve sein muss, besteht. Aus diesem Grunde ist dem angezogenen Satze nachstehende Form zu geben:

„Eine ebene C_6^4 ist jederzeit das Erzeugniss eines Strahlenbüschels, dessen Centrum der reelle Doppelpunkt O ist, mit einer quadratischen Tangenteninvolution, deren Träger ein die C_6^4 im Allgemeinen viermal berührender Kegelschnitt k ist, sofern die beiden projectivischen Punktenreihen $\xi\xi'$, welche durch das Büschel und durch die Involution conlocal auf der Involutionsaxe o (bezugs des Kegelschnitts k) perspectivisch ausgeschnitten werden, selbst in Involution sind, und imaginäre Doppelelemente — d. s. die imaginären Doppelpunkte der Curve — besitzen.“

226. Die constructive Verwerthung des vorstehenden Satzes erfordert die folgenden Annahmen (Fig. 37., s. Taf. II.). In der Ebene liegen: ein Kegelschnitt k, eine Gerade o und ein Punkt O in ganz beliebiger Situation. Auf der Geraden o sind überdies zwei Paare entsprechender Elemente der Punktenreihen $\xi\xi'$ bekannt, von welchen die ξ-Elemente perspectivisch dem Strahlenbüschel O, die ξ'-Elemente perspectivisch den entsprechenden Elementen der Tangenteninvolution auf dem Grundkegelschnitte k zugewiesen werden. Die Vervollständigung entsprechender Elemente der Reihen $\xi\xi'$ geschieht auf bekannte Weise mittelst eines beliebigen durch O ziehenden Kreises K, wodurch ein Involutions-Centrum S auf dem Kreise K erhalten wird.

Weil die Punkteninvolution $\xi\xi'$ auf dem Träger o elliptisch vorausgesetzt wurde, muss das Centrum S sich stets im Innern des Constructionkreises K befinden.

Der Pol Ω von o in Bezug des Grundkegelschnitts k inducirt ein mit den ξ'-Elementen perspectivisches Strahlenbüschel; dieses ist dem Strahlenbüschel O der ξ-Elemente projectivisch, wodurch wir einen Kegelschnitt $\varkappa$ erhalten, welcher durch die Punkte $O\Omega$ zieht, und in dessen Punkten φ sich also die entsprechenden Strahlenelemente der Büschel $O\Omega$ treffen. Umgekehrt kann man auch mit Hilfe von $\varkappa$ sehr einfach entsprechende Elemente der Involution $\xi\xi'$ auf der Axe o erhalten, wenn man durch einen φ-Punkt dieses Kegelschnitts einen Strahl des

Büschels O zieht, der auf o das zugehörige ξ-Element angibt, und andererseits durch φ einen Strahl des Büschels Ω zieht, der auf o das conjugirte ξ'-Element ausweist. Die Tangenten in den beiden Büschelmittelpunkten $O\Omega$ des erzeugten Kegelschnitts $\varkappa$ sind bekanntlich jene Geraden, welche durch jenen ξ'-Punkt ziehen, der dem ξ-Punkte des gemeinschaftlichen Strahles $|O\Omega|$ auf der Trägergeraden o in der $\xi\xi'$-Involution conjugirt ist. Auf diese Weise stehen einander jener ξ'-Punkt und die Gerade $|O\Omega|$ polar bezugs des Kegelschnitts $\varkappa$ gegenüber.

227. Jeder O-Strahl wird von dem Tangentenpaare $\bar{x}\bar{x}'$, welches aus dem conjugirten ξ'-Punkte an den Grundkegelschnitt k gezogen werden kann, in einem Punktenpaare XX' getroffen, dessen geometrischer Ort die Plancurve C_6^4 ist. Die Verfolgung dieser Construction erweist unzweifelhaft das Büschelcentrum O als einen Doppelpunkt der Curve. Er wird Knoten, Einsiedler oder Rückkehrpunkt sein, je nach seiner Situation ausserhalb, innerhalb oder auf dem Grundkegelschnitt k.

Die reellen Doppelpunktstangenten dd' findet man mit Hilfe der aus O an k gehenden Tangenten, indem diese letzteren als Strahlen des O-Büschels behandelt und deren entsprechende im Ω-Büschel aufgesucht werden. Die Verbindungslinien der ξ'-Punkte dieser letzteren mit O repräsentiren die verlangten Doppelpunktsstrahlen dd'. Zieht man aus dem ξ-Punkte

einer der aus O an k möglichen Tangenten die andere Tangente an diesen Kegelschnitt, so trifft sie die der ersteren zugehörige Doppelpunktstangente in ihrem Tangentialpunkte D, wodurch am ersichtlichsten die Knoteneigenschaft des O-Punktes vor Augen tritt.

Ist O ein Punkt des Grundkegelschnitts k selbst, so gibt es an denselben nur eine einzige Tangente und wir erhalten also auch nur eine Curventangente: die Spitzentangente d, weil O in diesem Falle, wie oben gesagt ist, ein Rückkehrpunkt ist. Der Tangentialpunkt D dieser Spitzentangente ist nach dem Vorigen ohne Schwierigkeit zu erhalten.

228. Man hat auseinanderzuhalten, dass die Gerade o als der Träger von zwei Punkteninvolutionen zu berücksichtigen ist: Die Involution, welche durch die $\xi\xi'$-Elemente bedingt ist, und die Tangenteninvolution des Grundkegelschnitts k, als deren Centrum der Ω-Punkt gefunden wurde. Die erstere Involution ist a priori elliptisch vorausgesetzt worden; diejenige des Poles Ω kann jedoch beliebig sein. Von der Art der letzteren hängt die Art der Verzweigungselemente der Plancurve C_6^4 ab. Ist nämlich (Fig. 37, s. Taf. II.) die Involution Ω elliptisch, was stattfindet, sobald Ω im Innern des Grundkegelschnitts k liegt, so enthält C_6^4 keine Verzweigungselemente; sowie aber (Fig. 38., s. Taf. II.) der o-Träger den Grundkegelschnitt in reellen Punkten trifft, lassen sich aus dem Doppelpunkte O, gleichgiltig, ob derselbe ein eigentlicher

oder ein isolirter Punkt ist, ein Paar Verzweigungstangenten an die Curve C_6^4 ziehen. Wir erhalten dieselben dadurch (173), dass wir die Doppelstrahlen der Involution Ω — d. s. also die Tangenten, welche in den Schnittpunkten $\overline{V}\overline{V}'$ des Trägers o und des Grundkegelschnitts k an diesen letztern ziehen — mit dem Hilfskegelschnitt $\varkappa$*) schneiden. Man bekommt diesfalls die beiden Verzweigungspunkte VV' der Curve C_6^4, deren Verbindungslinien mit dem Doppelpunkte O die Verzweigungsstrahlen dieses letzteren sind.

Die Verzweigungspunkte VV' sind nämlich nichts anderes, als die Doppelelemente der centralen quadratischen Fundamentalinvolution (89), deren Centrum der Doppelpunkt O auf der Curve ist. Jeder Doppelpunktsstrahl trifft die Curve in einem Paare Punktenelemente, welche in der Involution conjugirt sind. Diese Punktenpaare bilden sich mit Hilfe der entsprechenden Tangenten als deren Berührungspunkte auf dem Grundkegelschnitte ab, wo sie ebenfalls eine quadratische Involution formen, deren Centrum Ω und deren Doppelelemente durch das Punktenpaar $\overline{V}\overline{V}'$ vertreten ist. Solcherart kann man auch sagen: Die Plancurve C_6^4 ist auf dem Grundkegelschnitte punktenweise abgebildet.

229. Wir haben in (225) behauptet, dass der Grundkegelschnitt k, welcher nach dem eben gewonnenen Resultate das Bild der Curve C_6^4 darstellt,

*) welcher in Fig. 38. nach (226) zu ergänzen ist.

diese letztere berührt. Man kann sich von der Richtigkeit dessen auf ähnlichem Wege wie in (174) überzeugen, indem man (Fig. 37., s. Taf. II.) den Kegelschnitt β construirt. Dieses geschieht dadurch, dass man einen beliebigen Strahl des Doppelpunktes O annimmt, dessen entsprechenden im Ω-Punkte mittelst des φ-Punktes im Hilfskegelschnitte $\varkappa$ aufsucht, welcher den o-Träger in einem ξ'-Punkte trifft. Die Polare des ξ'-Punktes bezüglich des Grundkegelschnitts k ist ein Strahl des Büschels Ω und schneidet den O-Strahl in einem Punkte ϱ des Kegelschnitts β. Dieser Kegelschnitt — als Erzeugniss der definirten projectivischen Büschel $O\Omega$ — trifft den Grundkegelschnitt k in höchstenfalls vier Punkten $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4$, welche identisch die Berührpunkte zwischen kC_6^4 anzeigen. Dass der Kegelschnitt β die Büschelmittelpunkte $O\Omega$ enthält, deren Tangenten einfach zu construiren sind, ist aus den Elementen bekannt. Denn zunächst im Ω-Punkte ist die bezügliche Tangente nichts anderes, als der in der $\xi\xi'$-Involution dem gemeinsamen Strahle $|O\Omega|$, als Element des O-Büschels, entsprechende Strahl des Büschels Ω, welcher letztere aber die Polare des ξ'-Punktes ist, der dem ξ-Punkt von $|O\Omega|$ zugeordnet erscheint. Betrachten wir hingegen die $|O\Omega|$ als Element des Büschels Ω, so entspricht demselben in Bezug des Grundkegelschnitts k ein Pol ξ' auf dem Involutionsträger o; durch den jetzt conjugirten ξ-Punkt der Involution $\xi\xi'$ zieht aber die Tangente des O-Punktes an den betrachteten Kegelschnitt β.

§ 36. Das Fundamental-Kegelschnittsnetz.

230. Jede Gerade g der Ebene schneidet die Plancurve C_6^4 in vier Punkten, die paarweise imaginär sein können. Bekanntlich entsprechen die Schnittpunkte einer g-Geraden den Schnittpunkten eines Kegelschnitts γ mit dem Grundkegelschnitte k, welcher als Bild von g anzusehen ist, und der durch die Pole der Seiten des Hauptdreiecks der C_6^4, sowie auch durch den Polpunkt G der Geraden g bezugs des Grundkegelschnitts k, zieht (167). Da von den Seiten des besprochenen Hauptdreiecks nur die o-Gerade und deren Pol Ω reell vorhanden sind, während zwei der betreffenden Polpunkte imaginär sind, so hat man also eine Kegelschnitts-Construction mit theilweise imaginären Bestimmungselementen durchzuführen. Allein, wir dürfen davon absehen, weil wir ja die g-Gerade als gegeben voraussetzen. In Folge dessen können ausser den a priori vorhandenen zwei reellen Bestimmungspunkten ΩG immerhin beliebige andere Punkte des Kegelschnitts γ gefunden werden, welche ausreichend sind, um dessen mit dem Grundkegelschnitte k gemeinschaftliche Punkte nach bekannten Constructionen festzusetzen. Solche Punkte von γ werden folgend erhalten.

Ein beliebiger Curvenpunkt X von C_6^4 ist nach der Grundconstruction als Schnitt eines O-Strahles mit der entsprechenden Tangente $\bar{x}$ des Grundkegelschnitts k, welche auf dem o-Träger einen Punkt des

ξ'-Systems enthält, anzusehen. Der O-Strahl trifft die g-Gerade in einem Punkte α. Verfolgt man auf diese Weise die gesammten X-Punkte der Curve, indem man gleichzeitig sowohl für das System der α-Punkte als auch für dasjenige der ξ'-Punkte in Bezug auf den Grundkegelschnitt k die Polaren construirt, so bestimmen diese letzteren zwei projectivische Strahlenbüschel, deren Mittelpunkte für die α-Polaren der Pol G, für die ξ'-Polaren der Pol Ω sind. Das Erzeugniss der Büschel $G\Omega$ ist der Kegelschnitt γ, welcher mit dem Grundkegelschnitt k die Bilder der in Frage stehenden Schnittpunkte, die zwischen g und C_6^4 stattfinden, gemeinsam hat.

Weil man, bei der als gegeben vorausgesetzten Geraden g, für den Kegelschnitt γ beliebige ausreichende Bestimmungsstücke jederzeit ermitteln kann, so ist selbstverständlich, dass die Festsetzung der fraglichen Schnittpunkte mit der Curve C_6^4, resp. in ihrer Abbildung auf dem Grundkegelschnitt k, auf eine lineare Construction hinauskommt. Erheblich einfacher noch wird sich die betreffende Construction rein linear dann gestalten, wenn etwa die g-Gerade a priori durch zwei ihrer Schnittpunkte der Plancurve gegeben wäre.

231. Wenn wir uns auf frühere Ableitungen (168) beziehen, so formiren die Kegelschnitte γ des vorigen Artikels sämmtlicher in der Ebene der Plancurve C_6^4 gedachten g-Geraden ein Netz, dessen Grundpunkte

die Ω-Pole der o-Seiten des Hauptdreiecks für den Grundkegelschnitt k sind. Nach unserem vorliegenden Falle sind zwei Doppelpunkte der Curve imaginär, folglich auch die durch sie und den reellen Doppelpunkt O gehenden Seiten des Doppelpunktsdreiecks. Die imaginären Doppelpunkte der Plancurve sind jedoch nach (225) die Doppelelemente der auf o befindlichen elliptischen $\xi\xi'$-Involution, und da wir diese polar-reciprok nach Ω übertragen haben, so muss logisch der gleiche Vorgang mit der zur $\xi\xi'$-Involution perspectivisch verbundenen Strahleninvolution des Doppelpunktes O beobachtet werden. Diese letztere wird sich also dual in eine Punkteninvolution übertragen, deren Träger offenbar die Polare $\bar{\omega}$ des O-Punktes bezüglich des Grundkegelschnitts k ist. Wir finden ebenso die conjugirten Elementenpaare auf $\bar{\omega}$. Sind (Fig. 37.) z. B. $\xi\xi'$ conjugirte Elemente auf o, so bestimmen ihre Polaren des Grundkegelschnitts k auf $\bar{\omega}$ gleichfalls ein Paar conjugirte Punkte $\xi_1\xi_1'$. Weil nun die $\xi\xi'$-Involution elliptisch ist, so ist auch die $\xi_1\xi_1'$-Involution elliptisch, und da jeder γ-Kegelschnitt durch die imaginären Doppelelemente der $\xi_1\xi_1'$-Involution hindurch geht, so folgt, dass keiner dieser Kegelschnitte mit der Geraden $\bar{\omega}$ reelle Punkte gemein haben kann.

232. In dem Netze der Kegelschnitte γ ist derjenige $\gamma\infty$, welcher der unendlich fernen Geraden $g\infty$ bildlich entspricht, deshalb hervorzuheben, weil seine

mit dem Grundkegelschnitte gemeinschaftlichen Punkte die Asymptotenelemente der Plancurve C_6^4 fixiren. Auf die Construction dieses Kegelschnitts näher einzugehen, halten wir für überflüssig, da wiederholt durch vorhergegangene Erörterungen die wesentlichsten Beziehungen auch für diesen Fall bereits erledigt erscheinen. Wohl aber muss auch hier wieder auf die Bestätigung des Satzes (76) hingewiesen werden, dass nämlich höchstens vier Asymptotenelemente in der Curve vorkommen, weil die Kegelschnitte $k \gamma \infty$ nicht mehr, als vier Schnittpunkte gemein haben können. Es werden aber auch jetzt die Fälle über die Realität der Asymptotenpunkte zu berücksichtigen sein, wie sie in (77) erörtert wurden, wodurch die gestaltlichen Verhältnisse der betrachteten Curvengattung entsprechend charakterisirt werden.

233. Von entscheidender Wichtigkeit für alles Folgende erscheint die Construction der Tangente x (Fig. 37., s. Taf. II.) in einem beliebigen Punkte X der Curve C_6^4. Nach dem Vorhergegangenen entspricht einer Curventangente x ein Kegelschnitt γ, der den Grundkegelschnitt k in dem Bildpunkte $\overline{X}$ von X einfach berührt und ein Individuum des Netzes ist, dessen Grundpunkte durch den Pol Ω und die imaginären Doppelpunkte der Polaren $\bar{\omega}$ bezeichnet worden sind. Wir erhalten damit drei Bestimmungselemente dieses Kegelschnitts, wozu weiter noch das Bild $\overline{X}$ und offenbar dessen Tangente $\bar{x}$ auf dem Grundkegel-

schnitte gezählt werden müssen, was γ ausreichend durch fünf Elemente festzusetzen vermag. Obgleich die Frage nach der Lösung der vorstehend charakterisirten Aufgabe als eine Kegelschnittsconstruction vorausgesetzt werden könnte, wollen wir uns dennoch wegen der Wichtigkeit der Sache etwas ausführlicher damit beschäftigen.

Die Verbindungslinie $|\overline{X}\Omega|$ trifft den $\bar{\omega}$-Träger (Polare von O in Bezug k) in einem ξ_1-Elemente der in (231) angegebenen polaren Involution, die wir uns perspectivisch im Centrum Ω durch eine Strahleninvolution verbunden zu denken haben, und die wir abermals mittelst eines Hilfskreises K_1, der durch Ω geht, vervollständigen. Das Centrum dieser auf K_1 ausgeschnittenen Involution, welche wie diejenige, aus der sie stammt, elliptisch sein muss, ist der Punkt S_1. Der Strahl $|\overline{X}\Omega|$ schneidet den Kreis K_1 in einem Punkte, welcher mit S_1 zu verbinden ist; letztere Verbindungslinie hat auf K_1 einen zweiten Punkt gemein, durch den ein Ω-Strahl zieht, der auf dem Träger $\bar{\omega}$ das zu dem oben bezeichneten ξ_1-Punkte conjugirte Element ξ_1' angibt. Die Tangente $\bar{x}$ des Grundkegelschnitts k im Punkte $\overline{X}$ trifft $\bar{\omega}$ in einem Punkte τ, zu welchem wir in der $\xi_1\xi_1'$-Involution wie vorhin den conjugirten τ' suchen. Nun bestimme man folgenden Schnitt:

$$(|\overline{X}\tau'|,\ |\Omega\xi_1'|) \equiv Y,$$

so wird der Schnittpunkt Y ein Punkt und die Ver-

bindungsgerade $|\tau Y|$ die zugehörige Tangente des Kegelschnitts γ sein.

Die punktenweise Vervollständigung des Kegelschnitts γ unterliegt jetzt keiner Schwierigkeit, wenn man die Punkte $\overline{X}Y$ als Centra von zwei projectivischen Strahlenbücheln behandelt, welche perspectivisch und wechselweise mit den Punktenelementen der $\xi_1\xi_1'$-Involution verbunden werden.

Der Kegelschnitt γ hat mit dem Grundkegelschnitt k höchstens noch zwei Punkte $\overline{T}\overline{T}'$ gemeinschaftlich, welche die Tangentialpunkte TT' der in X an die Plancurve C_6^4 gehenden Tangente x abbilden, und welche durch die Grundconstruction, also mit Hilfe der in den Bildern $\overline{T}\overline{T}'$ gezogenen Tangenten an k, gefunden werden. Das Punktenpaar $\overline{T}\overline{T}'$ kann bekanntlich auch linear, also ohne die Vervollständigung des Kegelschnitts γ in seiner Gänze vorzunehmen, gefunden werden. Diese Construction gestaltet sich mit Hilfe der bereits vorhandenen Bestimmungsstücke des Kegelschnitts γ ungemein einfach folgend. Der Strahl $|\overline{X}Y|$ trifft den Grundkegelschnitt k in einem Punkte η und ebenso der Strahl $|\overline{X}\Omega|$ in einem Punkte $\overline{X}'$; der Schnitt:

$$(|Y\Omega|, \ |\eta\overline{X}'|) \equiv \sigma$$

ist ein Punkt der gemeinschaftlichen Sekante s der Kegelschnitte $k\gamma$, auf welcher das $\overline{T}\overline{T}'$-Paar liegt. Einen zweiten Punkt dieser Sekante erhalten wir sofort als Schnitt σ' der Tangenten in η an den Grundkegelschnitt k und in Y an den Kegelschnitt γ,

welche letztere Tangente vorhin, als durch den Punkt τ (Schnitt der beiden Geraden $\bar{x}\bar{\omega}$) laufend, angezeigt wurde.

§ 37. **Doppeltangenten und Inflexionen.**

234. Das Punktentripel XTT' einer variablen x-Tangente der Curve C_6^4 wird bekanntlich jene Coincidenzen umfassen können, wodurch Doppelpunktstangenten, Verzweigungstangenten, Doppeltangenten und Inflexionen der Curve entstehen. Die beiden ersteren Singularitäten wurden bereits in (227) und (228) erledigt. Doppeltangenten und Inflexionen können erfolgreich studirt werden, wenn wir das in (§ 12.) betrachtete absolute System der Tangentialpunkte einer Unicursalcurve 4ter Ordnung für den vorliegenden Specialfall in Erwägung ziehen.

Die Punktenpaare $\bar{T}\bar{T}'$ der $\bar{X}$-Punkte auf dem Grundkegelschnitte k bilden ein symmetrisches Punktensystem 4ten Grades. Die s-Sekanten, welche durch die $\bar{T}\bar{T}'$-Paare bestimmt werden, umhüllen als Tangenten eine Directionscurve 4ter Classe vom Symbole D_4^6. Dieselbe besitzt die Polare $\bar{\omega}$ als reelle Doppeltangente und sonst noch einen reellen Doppelpunkt. Sie hat mit dem Grundkegelschnitte k höchstens vier reelle gemeinschaftliche Tangenten, deren Berührungspunkte auf ihm in zwei Paaren die Berührungspunkte der nur zwei reellen Doppeltangenten der Plancurve C_6^4 abbilden. Sie durchsetzt unter Anderm den Grundkegelschnitt insbesondere auch höchstens zweimal in

den Bildern der Tangentialpunkte der möglichen zwei reellen Inflexionstangenten der Plancurve C_6^4, und die Tangenten dieser Punkte an die Directionscurve D_4^6 selbst treffen als Elemente der s-Sekanten den Grundkegelschnitt zum andern Theile in den Bildern der beiden reellen Inflexionspunkte der Grundcurve C_6^4.

Construirt man die polar-reciproke Directionscurve D_6^4, so ist sie bekanntlich der Ort der Pole der s-Sekanten. Diese ist also dual zu der zuerst betrachteten eine solche, in welcher der Pol Ω der einzige reelle Doppelpunkt ist. Ihre mit dem Grundkegelschnitt gemeinschaftlichen Tangenten berühren ihn in den Bildern der Tangentialpunkte der höchstens zwei reellen Inflexionstangenten, in denen die zugehörigen s-Sekanten zum andern Male den Grundkegelschnitt in dem Bilde des betreffenden Inflexionspunktes schneiden, während die zwischen D_6^4 und dem Grundkegelschnitt gemeinschaftlichen Schnittpunkte in zwei Paaren die Berührpunkte der höchstens zwei möglichen reellen Doppeltangenten der Grundcurve C_6^4 abbilden.

235. Den Berührpunkten $B_1 B_1'$ einer eigentlichen Doppeltangente Δ_1 kann man (Fig. 38., s. Taf. II.) bildlich, wie schon oben allgemein bemerkt wurde, die Berührpunkte $\overline{B}_1 \overline{B}_1'$ der sie hervorbringenden Tangenten an den Grundkegelschnitt entsprechen lassen. Die Verbindungslinie der letzteren Berührpunkte ist eine Sehne p_1 des Grundkegelschnitts k, und wenn

die Plancurve C_6^4 zwei reelle Doppeltangenten $\Delta_1\Delta_2$ besitzt, so gibt es also auch zwei Sehnen p_1p_2, die sich in einem Punkte M_1 schneiden. Eigentlich gibt es (wie schon in (82) durch die dort bezeichneten $\zeta\zeta'$-Punkte gezeigt wurde) zwei Punkte M_1M_1', die sich immer auf einer Seite o des Hauptdreiecks der Plancurve C_6^4, in vorliegender Verwandtschafts-Beziehung auf der $\tilde{\omega}$-Geraden, situiren. Solche Punkte erhält man folgend.

Die Gerade $\tilde{\omega}$ ist in Bezug des Grundkegelschnitts k die Axe der durch den O-Punkt inducirten Involution, deren Doppelelemente $\delta_1\delta_2$ reell oder imaginär, je nach der Lage des Kegelschnitts k, sein werden. In (231) haben wir die zu Grunde liegende Involution $\xi\xi'$ polar und perspectivisch ebenfalls nach $\xi_1\xi_1'$ auf $\tilde{\omega}$ übertragen. Wir haben also coaxial auf der Geraden $\tilde{\omega}$ zwei Punkteninvolutionen $\delta\delta'$, $\xi_1\xi_1'$, von welchen die letztere a priori elliptisch ist. Dieser Fall bedingt bekanntlich immer ein reelles Paar gemeinschaftlicher conjugirter Punktenelemente M_1M_1', die nach einer bekannten Elementenconstruction gefunden werden, welche wir hier wiederholen. (Vergl. 83.)

In (233) wurde bezüglich des durch Ω gehenden Kreises K_1 das Centrum S_1 der auf $\tilde{\omega}$ befindlichen $\xi_1\xi_1'$-Involution angenommen. In gleicher Weise bestimmt die auf $\tilde{\omega}$ durch den Grundkegelschnitt k hervorgerufene Involution $\delta\delta'$ ein Centrum S_1', welches im Allgemeinen ganz ähnlich gefunden wird, indem je zwei conjugirte $\delta\delta'$-Elemente, durch Strahlen mit

Ω verbunden, den K_1-Kreis jedesmal in einem Paare Punkte treffen, deren Verbindungslinien sich in S_1' schneiden. Trifft die Polare $\bar{\omega}$ in einem reellen Punktenpaare $\delta_1\delta_2$ den Grundkegelschnitt, so sind dessen Elemente bekanntlich Doppelelemente der nun hyperbolischen $\delta\delta'$-Involution, und man erhält das S_1'-Centrum unmittelbarer als den Schnittpunkt jener beiden Tangenten des Kreises K_1, die man in den Punkten, welche die Ω-Strahlen der $\delta_1\delta_2$-Elemente mit diesem gemeinsam haben, zieht.

Die Verbindungslinie $|S_1S_1'|$ schneidet den K_1-Kreis in zwei Punkten $\mu\mu'$, deren Strahlen des Centrums Ω den $\bar{\omega}$-Träger in dem gesuchten Paare M_1M_1' schneiden. Der Natur der Sache nach bilden beide mit dem Paare $\delta_1\delta_2$ eine Harmonität: $(M_1M_1', \delta_1\delta_2) = -1$, und ihre Polaren mm' mit Bezug auf den Grundkegelschnitt k sind Strahlen des Doppelpunktes O der Plancurve C_6^4.

236. Zieht man durch einen der Punkte M_1M_1' eine beliebige Gerade p, so enthält sie als Sehne des Grundkegelschnitts k im Allgemeinen zwei, wie wir annehmen wollen, reelle Punkte 12 desselben. Betrachtet man dieselben als Bilder, so entsprechen ihnen, indem man sie mittelst der in ihnen gehenden Grundkegelschnittstangenten der Grundconstruction (277) unterwirft, zwei Punkte I II der Curve C_6^4. Die Verbindungslinie I II $\equiv g$ enthält auf der Curve noch ein Paar Punkte III IV, die wir reell voraussetzen wollen. Ihre Bilder 3 4 verbinden eine zweite Sehne p'

auf dem Grundkegelschnitt, welche gleichfalls dem betreffenden M_1-Punkte angehört. Das Quadrupel 1 2 3 4 stellt nach unseren Anschauungen jene Elemente vor, welche der Grundkegelschnitt k mit einem Kegelschnitte γ gemeinschaftlich hat, der im quadratischen Verwandtschaftssinne der Geraden g entspricht und ein Individuum des Kegelschnittsnetzes (231) ist, dessen Grundpunkte der Pol Ω und die auf $\bar{\omega}$ befindlichen imaginären Doppelelemente der $\xi_1 \xi_1'$-Involution sind. Für die Individuen γ dieser Kegelschnittsgruppe, welche in der bezeichneten Weise bedingt werden, sowie gleichzeitig für den Grundkegelschnitt k, wie schon früher hervorgehoben wurde, sind der betreffende M_1-Punkt und die zugehörige Gerade m nichts anderes als ein gemeinschaftlicher Pol und eine ebensolche Polare.

237. Frägt man nach dem Bilde einer p-Sehne als einer Geraden im Systeme des Grundkegelschnitts k, so entspricht ihm bekanntlich ein Kegelschnitt π, der den reellen Doppelpunkt O und die zwei imaginären der Plancurve C_6^4 durchzieht, weshalb er mit der Curve nur mehr zwei Punkte I II gemein haben kann. Diese letztern sind eben die Bilder der Sehnenpunkte 1 2 und wir erkennen daraus, dass die gesammten I II-Paare auf der Curve eine quadratische Involution, die central ist, ausmachen. Gleichzeitig aber erkennen wir in den III IV-Paaren ebenfalls eine centrale quadratische Involution von Punktenelementen, welche die erstere

begleitet (97). Auf dem Grundkegelschnitt k haben diese beiden Involutionen in ihrer Abbildung ein gemeinsames Centrum (100), welches durch einen der Punkte $M_1 M_1'$ repräsentirt ist, und vereinigen sich solcherart als Strahlengebilde der pp'-Sehnen zu conjugirten Elementen einer und derselben Involution in dem betreffenden M_1-Punkte als Centrum. Auf diese Art muss man also zwei derartige Strahleninvolutionen in den Mittelpunkten $M_1 M_1'$ unterscheiden.

238. „Die Doppelelemente $p_1 p_2$ jeder pp'-Involution der $M_1 M_1'$-Centra schneiden auf dem Grundkegelschnitte k die Bilder $\overline{B}\overline{B}'$ der Berührpunkte BB', einer Doppeltangente $\varDelta$ paarweise aus.“ Um sie zu erhalten, legen wir durch den betreffenden M_1-Punkt einen Hilfskreis K_2, bestimmen auf ihm die Schnitte von je zwei Paaren conjugirten Sehnen pp', die durch eine Gerade verbunden werden. Diese Verbindungslinien geben einen Punkt P an, dessen Polare unter allen Umständen eine eigentliche Sekante für K_2 sein wird, d. h. ihn in Punkten schneidet, welche man mit dem betreffenden M_1-Centrum zu verbinden hat. Die letzteren Verbindungslinien $p_1 p_2$ treffen den Grundkegelschnitt k in je einem (reellen oder imaginären) Paare der fraglichen Bilder der Berührpunkte $\overline{B}$ einer Doppeltangente der Plancurve C_6^4. Dass jede der $p_1 p_2$-Sehnen nichts anderes vorstellt, als die Berührsehne eines Kegelschnitts π, welcher den Grundkegelschnitt in ihren Endpunkten

doppelt berührt und dem Netze von Kegelschnitten angehört, zu dessen Grundpunkten Ω sowie die beiden imaginären Doppelelemente der $\xi_1\xi_1'$-Involution auf $\bar{\omega}$ gehören, ist nach vorhergegangenen Ableitungen zweifellos.

239. Wir haben bisher wiederholt Gelegenheit gefunden, die Wichtigkeit der Beziehungen, welche den Pol- und Polarenpaaren M_1M_1', mm' bei der linearen Bestimmung des einzig vorkommenden reellen Doppeltangentenpaares einer unicursalen Plancurve C_6^4 mit zwei imaginären Doppelpunkten eigen ist, einzusehen. Hieran reihen wir neuerdings eine Eigenschaft, die für die Construction wesentliche Vereinfachungen begreift, und die wir in den nachstehenden Satz kleiden:

„Die zwei reellen Doppeltangenten $\Delta_1\Delta_2$ einer C_6^4 mit zwei imaginären Doppelpunkten schneiden sich gemeinsam in einem Punkte N derjenigen m'-Polare, welche den M_1-Pol enthält, durch den das Doppelelementen-Sehnenpaar p_1p_2 geht. Der Punkt N ist in Bezug des Punktenpaares OM_1 der harmonisch zugeordnete des Schnittes Q, welchen der o-Träger mit der betreffenden m'-Polare erzeugt, so dass also die Relation besteht:

$$(OM_1,\ QN) = -1.“$$

Die Auffassung des N-Punktes im vorstehenden Satze ist jetzt conform der darüber in der Anmerkung des Art. (97) u. Art. (100) angezeigten Eigenschaft.

Darnach haben wir den N-Punkt — als Schnitt eines Doppeltangentenpaares der Plancurve C_6^4 — gleichzeitig als das Centrum einer biquadratischen Involution anzusehen, welche in zwei quadratische Involutionen von gemeinschaftlichem Centrum zerfällt, wie auch die bisher angestellten Kriterien zur Evidenz nachweisen.

Bemerkung. In Bezug der Lage der $M_1 M_1'$-Punkte muss beachtet werden, dass der Fall vorkommen kann, wo beide ausserhalb des Grundkegelschnitts k situiren. Dann ist es möglich, dass etwa nur eine der $p_1 p_2$-Geraden den Grundkegelschnitt als eigentliche Sekante trifft und somit auf der Plancurve C_6^4 auch nur eine einzige reelle Doppeltangente Δ vorkommt, wie z. B. in Fig. 37 Taf. II.

240. Was die gestaltlichen Verhältnisse einer C_6^4 der betrachteten Gattung betrifft, so ist darüber eigentlich nichts wesentlich Neues zu bemerken, was nicht schon vorher auch bei Curven 4[ter] Ordnung mit reellen Doppelpunkten gesagt worden ist. Aber es wäre immerhin etwa hinzuweisen, dass in dem vorliegenden Falle die Formation der Curve doch auch mit der Realität ihrer Doppeltangenten gewissermaassen dadurch bedingt wird, als das Vorhandensein von Inflexionen mit dem gestaltlichen Verlaufe der Curve damit zusammenhängt. In dieser Hinsicht muss gesagt werden: „dass das Vorhandensein von einem Paare eigentlicher Doppeltangenten jedesmal ein Paar reelle Wendepunkte bedingt; ist jedoch nur eine Doppeltangente eine eigentliche, so enthält die Curve niemals Inflexionselemente.“

Identificirt sich die Polare $\bar{\omega}$ des reellen Doppelpunktes O bezüglich des Grundkegelschnitts k mit

dem Träger o der Punkteninvolution $\xi\xi'$, wobei also auch die Punkte $O\Omega$ zusammenfallen, so wissen wir bereits aus (§ 15.), dass der O-Punkt zwei Inflexionen der Curve aufsaugt, mag er nun ein Knoten oder ein Isolator sein. Wir gehen an diesem Orte auf den bezeichneten Fall nicht näher ein, da er wesentlich nichts Neues zeigt, kommen aber später bei einer Specialität der Curve nochmals darauf zurück.

§ 38. Die Curve vom Symbole C_5^4.

241. Es ist nun die Curve 4[ter] Ordnung mit zwei imaginären Doppelpunkten zu untersuchen, wenn sie im reellen Doppelpunkte O eine Spitze weist, also vom Symbole C_5^4 ist. Wir wissen, dass diesfalls (Fig. 39., s. Taf. II.) der O-Punkt auf dem Umfange des Grundkegelschnitts k liegt. Wir können jetzt die $\xi\xi'$-Involution des o-Trägers unmittelbar nach (226) auf dem Grundkegelschnitte k, welchen man an Stelle des Hilfskreises K substituirt — sofern dieser Kegelschnitt k als Kreis angenommen wird, wie solches der Einfachheit in der Construction wegen bei der zugrundeliegenden Figur 39. geschehen ist — mit dem Involutionscentrum S abbilden. Sofort erkennt man die Verbindungslinie $|OS| \equiv d$ als Rückkehrtangente der Curve, wenn die Grundconstruction (227) im Auge behalten wird. Allein, eine kurze Ueberlegung zeigt uns auch gleichzeitig diese Gerade als die eine der gemeinschaftlichen Polaren m in (235), während die im O-Punkte gezogene Tangente des Grundkegel-

schnitts k die conjugirte Polare m' ist, und somit der auf m' befindliche Pol M unserer Ableitungen unmittelbar gefunden wird als Schnitt der zweiten Tangente, die man in dem gemeinsamen Punkte, welchen m mit k noch weiter hat, an den Grundkegelschnitt k zieht. Von der Richtigkeit des Vorstehenden kann man sich leicht überzeugen, wenn man die bezüglichen Constructionen wie in (235) ausführt, was dann zu demselben Resultate führt.

Die Anwendung der in (227) angegebenen Grundconstruction lässt uns die Curve C_5^4 punktenweise erhalten, so dass sie wieder das Erzeugniss eines Strahlenbüschels O — das mit den ξ-Elementen des o-Trägers perspectivisch verbunden ist — mit einer Tangenteninvolution des Grundkegelschnitts k wird, deren conjugirte Elementenpaare die ξ'-Punkte auf o enthalten. Der Grundkegelschnitt wird aber jetzt, da er den Rückkehrpunkt O a priori besitzt, nur mehr in höchsten drei Punkten β, von denen einer immer reell, die beiden andern jedoch imaginär sein können, berührt. Die β-Punkte erhält man wie in (229) mittelst des Kegelschnitts β, der durch den O-Punkt und durch den Pol Ω bezüglich des Trägers o und des Grundkegelschnitts k läuft.

242. Der Tangentialpunkt T der Spitzentangente $|OS|$ ergibt sich als ihr Schnitt mit jener zweiten Tangente, die aus dem Punkt Q in (239) an den Grundkegelschnitt möglich ist. Die Constructionen

der Schnittpunkte einer Sekante, der beiden Tangentialpunkte einer Tangente der Curve u. s. w. bieten wesentlich nichts Neues und können wir uns auf das Vorhergegangene in (230—233) berufen. Auch der Gang in der linearen Construction der zwei reellen Doppeltangenten $\Delta_1 \Delta_2$ einer C_5^4 bleibt in der Hauptsache demjenigen gleich, wie er in (238) beschrieben worden ist. Da jedoch einige Vereinfachungen durch den vorliegenden Fall bedingt sind, so sei die betreffende Construction wiederholt.

Wie oben bemerkt wurde, liegt der Pol M auf der Tangente m' des Grundkegelschnitts, welche im O-Punkte geht, und ist derselbe überhaupt in Bezug der Spitzentangente d der Curve C_5^4 zum Grundkegelschnitt harmonisch conjugirt. Durch M legen wir einen beliebigen Kreis K_1 und suchen auf ihm die Schnitte der Tangente $|MO|$ und der Geraden $|M\Omega|$ (wobei nach (226) Ω der Pol des Trägers o in Bezug des Grundkegelschnitts k ist), deren Verbindungslinie eine Sehne s von K_1 bestimmt. Zieht man nun einen beliebigen Strahl des M-Centrums, der auf dem Grundkegelschnitte k eine Sehne p ausschneidet, so entsprechen bekanntlich den Endpunkten $\overline{X}_1 \overline{X}_2$ der letzteren mittelst der an k gezogenen Tangenten zwei Curvenpunkte $X_1 X_2$, und die Verbindungsgerade $|X_1 X_2| \equiv g$ trifft die Curve C_5^4 noch in zwei weiteren Punkten $X_3 X_4$, deren Bilder $\overline{X}_3 \overline{X}_4$ auf k ebenfalls Endpunkte einer Sehne p' sind, die als Strahl der Involution M angehört und dem Strahle p conjugirt ist. Für die Strahleninvolution

M sind aber die vorhin angeführten Geraden $|MO|$, $|M\Omega|$ auch ein Paar conjugirte Elemente. Wenn demnach die Kreisschnitte der pp'-Strahlen von K_1 durch eine Gerade verbunden und mit der Sehne s geschnitten werden, so erhält man das Centrum P der Involution M. Die Tangenten aus P an den Kreis K_1 geben auf ihm zwei Punkte $\mu'\mu''$ an, die mit M durch Strahlen zu verbinden sind, welche die Doppelelemente der M-Involution sind und auf dem Grundkegelschnitte k in einem Sehnenpaare p_1p_2, oder vielmehr in dessen Endpunkten $\overline{B}$ die Berührpunkte B der Doppeltangenten $\varDelta$ der C_5^4 abbilden. Von diesem Sehnenpaare p_1p_2 ist mindestens das eine Element ein eigentliches, während das andere ein uneigentliches sein kann; es ist aber keinesfalls ausgeschlossen, dass beide p_1p_2-Strahlen gleichzeitig eigentliche Sehnen auf dem Grundkegelschnitt k ausschneiden, so dass man also ausprechen kann: „Eine Curve C_5^4 besitzt unbedingt eine eigentliche Doppeltangente, sie kann aber auch zwei solche enthalten, während zwei andere Doppeltangenten stets imaginär vorkommen.“ (Vergl. d. Bemerkung in (239.)

243. Weil die Spitzentangente $|OS| \equiv m$ und der Punkt M gemeinschaftliche Polare und Pol zwischen dem Grundkegelschnitte k und allen Kegelschnitten jener Gruppe sind, welche als Individuen dem Fundamentalnetze in (231) angehören, somit den reellen Punkt Ω und die imaginären Doppelpunkte der ellip-

tischen $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_1'$-Involution auf der Tangente $|OM| \equiv m'$ als Basispunkte besitzen, so müssen sich die wechselweisen Verbindungslinien der Sehnenendpunktenpaare $\overline{X}_1\overline{X}_2$, $\overline{X}_3\overline{X}_4$ auf der Polaren m in gemeinschaftlichen Punkten schneiden. Insbesondere ist dieses selbstverständlich auch von den Tangenten einer p-Sehne, welche eine der Doppeltangenten anzeigt. Von den sämmtlichen p-Sehnen sei nochmals die Gerade $|M\Omega|$ und ihr Schnitt ϱ mit der Spitzentangente $d \equiv m$ hervorgehoben, welcher Punkt späterhin eine ausgezeichnete Rolle zu spielen hat. Von ihm sei jetzt schon bemerkt, dass, wenn man ihn mit jenem Schnitte R verbindet, den die aus M an den Grundkegelschnitt k zweitmögliche Tangente auf dem Träger o hervorbringt, diese Verbindungslinie die erstere Tangente $m' \equiv |OM|$ in demjenigen Punkte N trifft, den wir in (239) als den gemeinsamen Schnittpunkt der zwei reellen Doppeltangenten der Plancurve C_6^4 erkannt haben, welche Eigenschaft also auch jetzt den beiden Doppeltangenten $\varDelta_1\varDelta_2$ der Spitzencurve C_5^4 erhalten bleiben muss. Allein es ergibt sich weiter, dass dieser Punkt N auch dadurch entsteht, wenn man aus dem Tangentialpunkte T der Spitzentangente, dessen Construction in (242) angezeigt wurde, die, ausser der ihn selbst erzeugenden Grundkegelschnittstangente $|Q\overline{T}|$, zweite Tangente an k zieht. Die Richtigkeit dessen wird man leicht aus den harmonischen Eigenschaften, welche dort bemerkt wurden, einsehen.

Zwölfter Abschnitt.

Bicirculare Curven vierter Ordnung.

§ 39. Definition. Fusspunktencurven und ihre Symmetrie.

244. Unter der vorbezeichneten Curvengattung versteht man jene Unicursalcurven 4ter Ordnung, bei welchen ein Paar des Doppelpunktentripels in die imaginären Kreispunkte der Ebene fällt. Sie haben also nur einen einzigen reellen Doppelpunkt und gehören demnach ebenfalls in die Curvengruppe, welche im vorigen Abschnitt betrachtet wurde. Sie unterscheiden sich auch in der Hauptsache nicht von diesen, weil die Lage des Trägers der (225) zugrundeliegenden Punkteninvolution $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$, als unendlich ferne Gerade $o\infty$ der Ebene, wesentlich keine Differenz ausmacht. Aus dieser Ursache können wir auf eine eingehendere Betrachtung dieser Curven im Allgemeinen verzichten und wollen nur jenen besonderen Fall behandeln, wo die Strahleninvolution des Doppelpunktes O, welche durch die $\mathfrak{x}\mathfrak{x}'$-Involution auf $o\infty$ perspectivisch hervorgerufen wird, die circulare ist, also je zwei conjugirte Strahlenelemente auf einander senkrecht stehen. Das Erzeugniss dieser definirten Beziehung wird eine Fusspunktencurve 4ter Ordnung genannt, und wir gerathen hier auf zum Theil in der Analytik wohlbekannte Curven, wenn wir den Grundkegelschnitt k in seiner Art variiren und auch die Lage des reellen Doppelpunktes O etwa in den Mittelpunkt dieses Kegelschnitts verlegen. Aus der Natur der Sache ist

in dem gegebenen Falle das Gesetz feststehend: „Wenn der O-Punkt auf einer Axe des Grundkegelschnitts k liegt, so bedingt dieses eine einfache Symmetrie der Erzeugnisscurve in Bezug dieser Axe, und wenn O der Mittelpunkt von k ist, eine zweifache Symmetrie für beide Axen des Grundkegelschnitts in der Curve.“ Nachdem die erzeugende Strahleninvolution des Doppelpunktes O circular ist, womit wie gesagt die imaginären Kreispunkte auf $o\infty$ als Doppelpunkte der Curve a priori vorauszusetzen sind, so braucht man zur Feststellung eines Grundkegelschnitts nur mehr fünf Curvenpunkte X; denn jede Gerade, welche senkrecht gegen die betreffende Verbindungslinie $|OX|$ in X gezogen wird, ist eine Tangente des Grundkegelschnitts. Aus diesem Grunde kann man den Satz aussprechen:

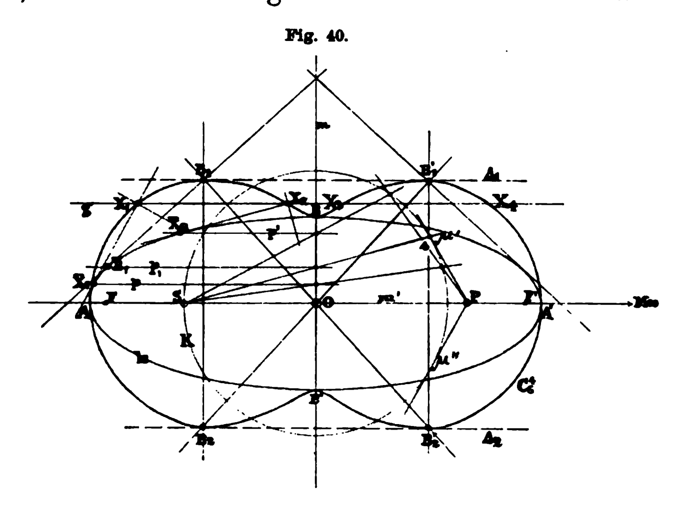
„Eine Fusspunktencurve 4ter Ordnung ist im Allgemeinen durch acht reelle Elemente, von welchen im Doppelpunkte drei consumirt sind, bestimmt.“

§ 40. Die Ellipse als Grundkegelschnitt.

245. Wir untersuchen (Fig. 40.) den Fall, wo der O-Punkt mit dem Centrum Ω, als Pol der Geraden $o\infty$ des Grundkegelschnitts k, zusammenfällt. Die punktenweise Erzeugung der bicircularen C_6^4 erfolgt nach dem Constructionsgesetze (227) ohne Schwierigkeit und höchst einfach: „man braucht nur einen beliebigen O-Strahl mit den zwei gegen ihn senkrecht gezogenen

Tangenten des Grundkegelschnitts in Curvenpunkten zu schneiden.“ Man findet, dass die Fusspunktencurve C_6^4 in den vier Scheiteln der Grundellipse von dieser berührt wird. Es ist dieses der einzige Fall, wo eine Berührung in vier reellen Punkten zwischen

Fig. 40.



einer Curve 4[ter] Ordnung, die zwei imaginäre Doppelpunkte auf $o\infty$ hat, und ihrem Grundkegelschnitte vorkommt. Die gefundene C_6^4 hat den Mittelpunkt O des Grundkegelschnitts k als einen isolirten Inflexionsknoten (134), weil O der Pol der Hauptlinie $o\infty \equiv \bar{\omega}$ ist; sie besitzt darnach vier reelle Inflexionen und zwei eigentliche Doppeltangenten. Die Berührpunkte B dieser letzteren können nach den früheren Ableitungen leicht gefunden werden. Man bedenke, dass die beiden Hauptaxen der Grundellipse k die in (235) bezeichneten Polaren mm' sind und dass die Polare $\bar{\omega}$ des O-Punktes sich mit $o\infty$ identificirt, also die Punkte $M_1 M_1'$ die unendlich fernen Punkte der Ellipsenaxen sind. Nur

der Punkt $M\infty$ der grossen Ellipsenaxe zeigt reelle p-Sehnen (235) an. Um sie zu finden, verfahren wir folgend. Auf der grossen Axe $|AA'| \equiv m'$ nehme man einen beliebigen Kreis K mit seinem Centrum irgendwo, z. B. in O selbst, an. Eine beliebige Gerade g, die zu $|AA'|$ parallel gezogen ist, trifft die Curve C_6^4 in zwei gegen die kleine Ellipsenaxe $|BB'| \equiv m$ näher liegenden Punkten $X_2 X_3$ und in zwei ihr ferner liegenden $X_1 X_4$-Punkten. In je einem Punkte dieser beiden Paare geht eine bei der Erzeugung der Curve verwendete Tangente der Ellipse k, welche die letztere in einem Punkte $\overline{X}$ berührt, den wir durch einen (aus $M\infty$) zu $|AA'|$ parallelen Strahl p auf $|BB'|$ projiciren. Die dabei erhaltenen zwei Projectionspunkte verbinden wir mit dem einen der Schnittpunkte S, welche der Kreis K auf $|AA'|$ hat, durch Strahlen und ebenso die zwei dadurch auf K entstehenden Kreisschnitte durch eine Sehne s, die die $|AA'|$ in dem Pole P (238) trifft. Dass nämlich die Gerade $|AA'|$ ebenfalls einer s-Sehne gleich kommt, zeigt eine kurze Ueberlegung der symmetrischen Eigenschaften der Curve C_6^4 und der Ellipse k gegen die Axen $|AA'|$, $|BB'|$.

Verbindet man jetzt die Berührpunkte μ der aus P an den Hilfskreis K gezogenen Tangenten mit dem Centrum S durch Gerade, so treffen diese die $|BB'| \equiv m$ in zwei Punkten (Doppelelemente der auf $|BB'|$ dieserart befindlichen Involution); die in den zuletzt erhaltenen Punkten zu $|AA'|$ parallel gezogenen (nach $M\infty$ gerichteten) Geraden $p_1 p_2$ sind

die Doppelstrahlen der Involution $M\infty$ und treffen die Ellipse in Sehnen, in deren Endpunkten $\bar{B}\bar{B}'$ an sie Tangenten laufen, die als erzeugende Elemente der Grundconstruction (227) die betreffenden O-Strahlen in den fraglichen Berührpunkten BB' der zwei reellen Doppeltangenten $\Delta_1\Delta_2$ schneiden. Da diese Doppeltangenten nach (239) sich in einem Punkte N der m'-Polaren, d. i. die Axe $|AA'|$, vereinigen, dieser aber in den Pol $M\infty$ fällt, so ist klar, dass sie der Axe $|AA'|$ gleichlaufend sein müssen. Aus Gründen der Symmetrie ist eigentlich selbstverständlich, dass die B_1B_2-Punkte so gelegen sind, dass sich ihre Verbindungslinien paarweise stets in einem Punkte des Tripels $OM\infty\,M'\infty$ schneiden.*)

§ 41. Die gleichseitige Hyperbel als Grundkegelschnitt. (Lemniscaten.)

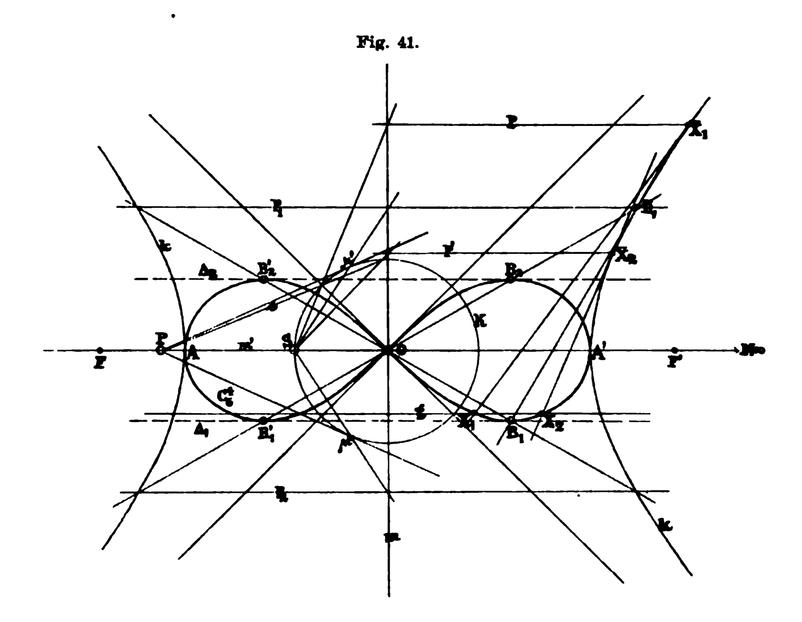
246. Der Mittelpunkt O der als Grundkegelschnitt gewählten Hyperbel k (Fig. 41.) sei Doppelpunkt der nach dem Grundgesetze (227) erzeugten Curve C_6^4. Diese ist als Fusspunktencurve die wohlbekannte Lemniscate, in welcher (§ 15.) O der Inflexionsknoten und die Hyperbel-Asymptoten die beiden in ihm gehenden Inflexionstangenten sind, weil der O-Punkt nach der vorliegenden Beziehung und im Hinblicke auf den Satz in (231) Pol der unendlich fernen Geraden $o\infty \equiv \tilde{\omega}\infty$ der Ebene ist. Die Grund-Hyperbel berührt in ihren

*) Man vergleiche die analogen Beziehungen im V. Abschnitte, welche dort aus den harmonischen Eigenschaften entwickelt wurden.

beiden reellen Scheiteln AA' die Lemniscate, und diese ist symmetrisch zu den beiden Axen der Hyperbel.

Die zwei reellen und eigentlichen Doppeltangenten der Curve werden ähnlich wie in (245) erhalten: Man bestimmt zuerst zwei X-Punkte einer zur reellen

Fig. 41.



Axe Parallelen g auf der Lemniscate, wovon der eine näher, der andere entfernter zur imaginären Hyperbelaxe liegt, sucht die Berührungspunkte $\overline{X}_1 \overline{X}_2$ der durch sie gehenden Erzeugungstangenten auf der Hyperbel und projicirt diese letztern Punkte parallel zur reellen Axe auf die imaginäre Axe m der Hyperbel mittelst pp'-Strahlen. Sodann zieht man durch die gefundenen Projectionspunkte Strahlen in dem einen S-Schnitte, welchen ein beliebiger Kreis K — der seinen Mittelpunkt auf der reellen Axe hat — mit dieser Axe besitzt, und

verbindet die zwei Kreisschnitte jenes Strahlenpaares durch eine Gerade s. Letztere trifft die Gerade $|AA'|$ in dem Involutions-Centrum P, aus dem an K Tangenten gehen, deren Berührpunkte $\mu'\mu''$ in S Strahlen verbinden, die auf der imaginären Hyperbelaxe m die Doppelpunkte der auf ihr befindlichen Involution der oben angegebenen Projectionspunkte anzeigen. Zieht man also wieder durch diese Doppelpunkte Parallelen $p_1 p_2$ zu $|AA'|$, so treffen sie die Grundhyperbel in Punktenpaaren $\bar{B}$, deren Tangenten auf der Lemniscate in den entsprechenden O-Strahlen die Berührpunkte B der Doppeltangenten aufschliessen.

Weil der M-Pol auf der reellen Axe $|AA'| \equiv m'$ unendlich fern liegt, so folgt der Parallelismus der beiden Doppeltangenten $\varDelta_1 \varDelta_2$ mit dieser Axe. Aus diesem Grunde und wegen der zweiaxigen Symmetrie der Lemniscate müssen auch die Berührpunkte B wechselweise auf Strahlen des Doppelpunktes O, so dass sie die auf der Grundhyperbel oben bezeichneten Tangentenpunkte in sich haben, liegen, wodurch eine Vereinfachung der Construction erzielt wird. (Vergl. die Fussnote in (245).)

247. Man muss auch jenen Fall in's Auge fassen, wo der Doppelpunkt O eine von dem Mittelpunkte Ω der Grundhyperbel verschiedene Lage einnimmt. Die hierbei entstehenden Fusspunktenlinien sind besonders dann interessant, sobald ihr Doppelpunkt nur auf einer Axe der gleichseitigen Grundhyperbel k liegt,

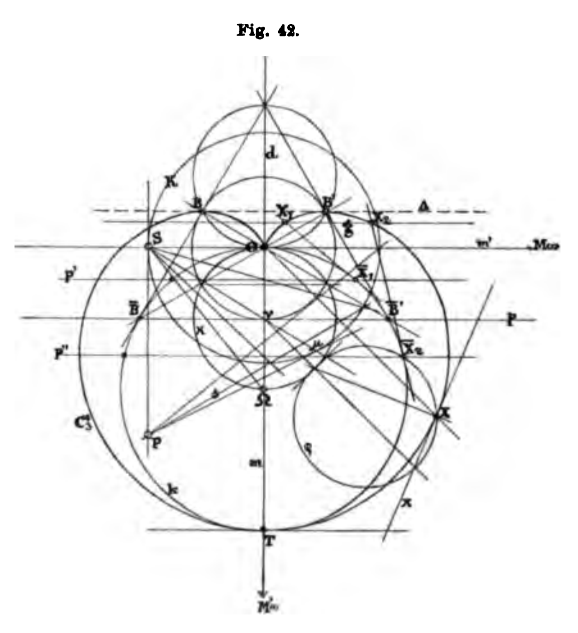
wobei sie auch nur zu dieser Axe symmetrisch sind. Ist der Doppelpunkt in einen der reellen Scheitel AA' der Grundhyperbel fallend, dann entsteht eine einspitzige Fusspunktencurve C_5^4 ohne eigentliche Doppeltangenten, welche zwei reelle Inflexionen hat und symmetrisch zur reellen Axe AA' ist.

Fusspunktencurven C_6^4, bei welchen die Grundhyperbel nicht die gleichseitige ist, sind collineare Figuren der Lemniscate, weshalb wir sie **Lemniscoiden** nennen wollen.

§ 42. Die Kreisverwandtschaft. (Epi- und Pericycloide, Cardioide.)

248. In der Ebene liegt (Fig. 42.) ein Kreis k, dessen Mittelpunkt Ω ist, in welchem wir einen beliebigen Durchmesser mit einem auf ihm befindlichen Punkte O als Doppelpunkt einer Fusspunktencurve 4ter Ordnung annehmen. Ist O mit Ω identisch, so ist offenbar das Erzeugniss der Be-

Fig. 42.



ziehung unserer Ableitungen dieses Abschnittes, der Grundkreis k selbst, welcher mit dem Centrum Ω zusammengehalten, die Curve 4ter Ordnung repräsentirt, insofern $\Omega \equiv 0$ als ein isolirter Doppelpunkt derselben angesehen werden muss. Die andere Grenzlage von O ist der unendlich ferne Punkt des Durchmessers $|O\Omega|$, wo dann die zwei in den Endpunkten TT' dieses Durchmessers gezogenen Grundkreistangenten mit dem Knoten $O\infty$ zusammengenommen das bicirculare Erzeugnis 4ter Ordnung ausmachen. Jede andere von Ω oder $O\infty$ verschiedene Lage des O-Punktes auf dem fixen Durchmesser des Grundkreises k involvirt als Erzeugniss der Beziehung eine Fusspunktencurve 4ter Ordnung, die in die Familie von Rollcurven, speciell jene der Epicycloiden zu zählen ist. So lange nämlich O innerhalb des Grundkreises liegt, ist die Rollcurve eine sogenannte verkürzte Epicycloide oder Hypotrochoide; liegt O ausserhalb des Grundkreises k, dann ist das Erzeugniss eine verlängerte Epicycloide oder Epitrochoide. Im ersteren Falle ist der O-Punkt isolirt, im letzteren ein Knoten. Jedesmal ist der Grundkreis für die Curve ein sie nur zweimal reell berührender. Die Richtigkeit dessen zeigt eine einfache Nachzählung. Der Grundkreis besitzt mit der bicircularen Curve a priori vier Elemente in den imaginären Kreispunkten der Ebene, was aus der perspectivischen Beziehung der unendlich fernen Geraden $g\infty \equiv o\infty$ in der quadratischen Verwandtschaft beider Curven klar ist. Von den

acht gemeinschaftlichen Elementen sind dadurch vier imaginäre absorbirt, weshalb die restlichen vier die reellen zwei Berührungspaare der gemachten Behauptung vorstellen. Diese Curven sind einaxig symmetrisch gegen den Durchmesser $|\Omega O|$ und dieser selbst trifft sie, ausser in dem Doppelpunkte O, noch in den zwei Punkten TT', wo die Berührung mit dem Grundkreise k stattfindet. Die Gerade $|O\Omega|$ repräsentirt also gewissermaassen den in (229) angegebenen Kegelschnitt β, welcher den Grundkreis in β-Punkten, hier durch die Punkte TT' vertreten, trifft.

Als Uebergangsform ist die einspitzige Epicycloide anzusehen, wenn nämlich O, wie in Figur 42., auf dem Grundkreis k selbst angenommen ist. Diesen Fall wollen wir auch etwas näher untersuchen. Vorher sei jedoch auf eine speciale Eigenschaft der Epicycloiden aufmerksam gemacht, welche diesen Curven insgesammt, sofern sie aus einem Grundkreise k unserer Beziehungen abgeleitet werden, zukommt. Diese besteht in Folgendem. Jeder Kreis der Ebene besitzt die imaginären Doppelpunkte auf der unendlich fernen Geraden $o\infty$ als Elemente gemeinsam. Weil nun diese Doppelelemente a priori als Doppelpunkte unserer Curvengattung vorausgesetzt sind, andererseits aber jeder Grundkegelschnitt, welcher durch einen Doppelpunkt der Curve läuft, dortselbst (227) für diese eine Spitze bedingt, so folgt, dass diese imaginären Doppelelemente in der Erzeugungscurve 4[ter] Ordnung Rückkehrpunkte vorstellen, wodurch bekanntlich die Classenzahl

dieser Curven unter allen Umständen um zwei Einheiten herabgesetzt wird. Eine Epicycloide besitzt demnach im Allgemeinen höchstens das Symbol C_4^4, weil sie jedenfalls in den imaginären Kreispunkten Spitzen hat. Wenn nun der O-Punkt ebenfalls dem Grundkreise k als angehörig vorausgesetzt wird, wie das bei der einspitzigen Epicycloide vorkommt, so erniedrigt sich die Classe derselben abermals, und sie erhält das definitive Symbol C_3^4.

249. Die Erzeugung einer bicircularen C_3^4 nach dem Grundgesetze (227) als Fusspunktencurve bedarf keines weiteren Commentars. Die Spitzentangente d derselben ist ohne weiteres der Kreisdurchmesser $|\Omega O|$, dessen Endpunkt T gleichzeitig ihr Tangentialpunkt ist, in welchem auch der Grundkreis k die Curve berührt. Dieser T-Punkt ist nach der Grundconstruction auf dem Hauptstrahle $|O\Omega|$ durch diejenige Tangente von k hervorgebracht, welche dem Punkte $Q\infty$, das ist der Punkt, den die (239) in O an k gehende Tangente auf $o\infty$ besitzt, zukommt, weil wir nicht vergessen dürfen, dass die Strahleninvolution in O circular ist, demnach ihr Centrum in dem als Hilfskreis K identisch benutzten Grundkegelschnitt k mit dem Ω-Pole zusammenfällt.

Die bicirculare Curve C_3^4 enthält nur eine einzige reelle oder eigentliche Doppeltangente Δ und keinerlei reelle Inflexionen. Die Berührpunkte B dieser Geraden und sie selbst erhalten wir durch Wiederholung des

Früheren mit unwesentlichen Modificationen. Die Tangente in O an den Grundkreis k und die Gerade $|O\Omega|$ repräsentiren die Polaren $m'm$, ihre unendlich weiten Punkte $M\infty M'\infty$ aber deren Pole nach (235). Nur im $M\infty$-Pole kommen reelle Doppelsehnen pp' vor, von denen die eine p den Grundkreis in eigentlichen $\bar{B}\bar{B}'$-Punkten treffen wird. Um sie zu finden, ziehen wir eine zur Grundkreistangente in O parallele Gerade g, welche die Curve in X-Punkten schneidet. Wir suchen weiter die entsprechenden eines näher und eines ferner zur Spitzentangente $|O\Omega|$ liegenden X-Punktes dieser Geraden g auf dem Grundkreise und projiciren sie durch Strahlen $p'p''$ aus $M\infty$ auf $|O\Omega| \equiv m$ selbst. Die erhaltenen Projectionspunkte werden durch Strahlen eines S-Schnittes der Tangente in O an k mit einem beliebigen Hilfskreis K, der seinen Mittelpunkt auf dieser Tangente liegen hat (z. B. in O selbst), verbunden, und deren Kreisschnitte mit K durch eine Gerade s verbunden. Da die Punkte $O\Omega$ auf der Spitzentangente ebenfalls ein Paar conjugirte Elemente der bezüglichen Involution auf $|O\Omega|$ bilden, so hat man sie gleichfalls mit S zu verbinden, wodurch eine zweite s-Gerade entsteht. Die beiden s-Geraden schneiden sich in dem P-Pole der Involution, Man wird finden, dass durch den P-Pol jedenfalls auch die in S laufende Tangente des K-Kreises geht, was aussagt, dass der Punkt $\Omega \equiv \varrho$ (243) dem unendlich fernen Punkte der Involution auf $|O\Omega|$ entspricht, also das Centrum derselben ist, was wieder

erheblich zur Vereinfachung der Construction des P-Punktes ausgenützt werden kann. Der Berührpunkt μ der zweiten Tangente, welche aus P an K gezogen wird, verbindet mit dem Centrum S einen Strahl, welcher die Spitzentangente in einem Punkte ν trifft, durch den die nach $M\infty$ laufende p-Sehne zieht, in deren Endpunkten $\bar{B}\bar{B}'$ am Grundkreise k diejenigen Tangenten laufen, die auf der Curve C_3^4, also in den entsprechenden, zu ihnen normalen Strahlen des O-Büschels, liegenden BB'-Punkte der eigentlichen Doppeltangente $\varDelta$ ausschneiden.

250. Die erzeugte Curve C_3^4 findet sich als eine Rollcurve, und zwar wie gesagt als einspitzige Epicycloide, wenn der Rollkreis ϱ von gleich grossem Durchmesser mit dem Basiskreise $\varkappa$, dieser aber von halb so grossem Durchmesser von jenem des Grundkreises k ist, wobei sich Basis- und Rollkreis gegenseitig ausschliessen; oder als einspitzige Pericycloide, wenn auch wieder der Basiskreis $\varkappa$ halb so gross wie der Grundkreis k im Durchmesser genommen wird, der letztere aber zugleich als Rollkreis gilt, welcher den ersteren stets einschliesst. Und wir gelangen weiter zu dem Resultate: „Die Epi- und die Pericycloide der bezeichneten Kreisbeziehungen sind unter sich und gleichzeitig mit der bekannten Cardioide identisch.“ Die Richtigkeit des von uns aufgestellten Satzes von der Identität der genannten Curven erhellt sofort aus

der Vergleichung ihrer bekannten analytischen Constructionsmethoden und der Resultate derselben. Uebrigens findet man die Bestätigung dessen auch in der Doppeltangentenconstruction des vorigen Artikels. Dort trifft der Strahl $|S\mu|$ die Spitzentangente $|OT|$ in demjenigen Punkte ν, durch welchen die p-Sehne des den Grundkreis k doppelt berührenden Kegelschnitts nach $M\infty$ läuft. Dieser ν-Punkt ist aber nichts anderes, als das Centrum des Basiskreises $\varkappa$ vom Durchmesser $\overline{O\Omega}$, auf welchem der gleich gross anzunehmende Rollkreis ϱ läuft. Verbindet man die Endpunkte $\overline{B}\overline{B}'$ der p-Sehne am Grundkreise k mit dem Rückkehrpunkte O durch Gerade, so gehen dieselben ebenfalls durch die Berührpunkte BB' der reellen Doppeltangente, gleichzeitig aber auch durch die Endpunkte derjenigen Sehne des Basiskreises der Rollcurve, die man parallel zur p-Sehne im Halbirungspunkte der Strecke $\overline{O\nu}$ zieht. Dieses ist aber ein bekanntes Resultat bei einer Epicycloide. Man wird auch andererseits wieder die ebenso bekannte Thatsache, wie sie bei der Cardioide stattfindet, nachsehen können an unserem Erzeugnisse, dass jeder Strahl des O-Büschels den Basiskreis $\varkappa$ in einem Punkte trifft, von dem die zwei weiteren Curvenpunkte die constante Entfernung, gleich dem Durchmesser des Basiskreises $\varkappa$, besitzen.

Das Vorstehende erlaubt uns endlich noch die Construction der Berührpunkte B der Doppeltangente als den Schnitt zweier Kreise zu finden, deren einer

der Rollkreis ϱ in der O-Lage, der andere aber von gleichem Radius, der seinen Mittelpunkt in O hat, ist.

251. Nach den Anleitungen des Artikels (233) kann man mit entsprechenden Modificationen jederzeit die Tangente x eines beliebigen Curvenpunktes X, resp. deren Tangentialpunkte ermitteln*), wobei nur zu berücksichtigen ist, dass diesfalls die Polare $\tilde{\omega}$ mit der in O gehenden Grundkreistangente coincidirt. Einfach und elegant ist folgendes Verfahren, wenn die Curve C_3^4 als Rollcurve betrachtet wird, und wenn es sich blos darum handeln sollte, die Lage der x-Tangente festzustellen. Man zieht zu dem O-Strahle des X-Punktes eine durch das ν-Centrum gleichlaufende Gerade und bestimmt auf ihr den betreffenden Rollkreis, welcher durch X gehen muss. Dieser Rollkreis trifft den ν-Strahl, ausser im Berührpunkte des Basiskreises, noch in einem zweiten Punkte, dessen Verbindungslinie mit X die gesuchte x-Tangente bildet. Oder noch kürzer: Wir verbinden den Berührpunkt, welcher zwischen dem Basiskreise $\varkappa$ und jenem Rollkreise, durch den der X-Punkt erzeugt wurde, stattfindet, mittelst einer Geraden, so ist diese die Normale der Fusspunktencurve C_3^4 im X-Punkte und die dagegen Senkrechte x die Tangente dieses Punktes.

252. Einspitzige bicirculare Fusspunktencurven C_3^4 können stets als collineare Projectionen von solchen

*) was übrigens auch für die in § 40. und 41. behandelten Curvengattungen Giltigkeit hat.

symmetrischen oder nicht symmetrischen Curven gleicher Ordnung und Classe hergeleitet werden, deren Grundkegelschnitt eine Ellipse k ist, welche ausser der reellen Spitze auch die zwei imaginären Spitzen einer derartigen Curve als einfache Punktenelemente besitzt und sie gesetzmässig höchstens noch einmal berührt, so dass der betreffende Berührpunkt unter allen Umständen reell sein muss. Dieser Fall tritt immer ein, sobald die projectivischen Punktenreihen $\xi\xi'$ und die durch die Grundellipse auf dem o-Träger bedingte Involution in (225) sich identificiren.

Die Frage nach der Anzahl der bestimmungsnöthigen Elemente einer bicircularen Curve 4ter Ordnung ist in folgender Weise zu beantworten. Die drei Doppelpunkte der Curve, von denen zwei die imaginären Kreispunkte im Unendlichen sind, verschlingen jeder, falls sie Knoten sind, drei, also zusammen neun Elemente. Von den 14 nöthigen Bestimmungsbedingungen bleiben sonach fünf übrig, deren Bilder für den Grundkegelschnitt ausreichen. Wird jedoch eine symmetrische bicirculare Curve gedacht, welche auf einem Kreise abzubilden ist, so kommt zu berücksichtigen, dass dieses Kreisbild a priori die imaginären Kreispunkte der Ebene incident enthält, weshalb ausser dem reellen Doppelpunkte der Curve nur mehr drei Elemente zu ihrer Angabe erforderlich sind, was übrigens auch schon dadurch klar wird, dass die imaginären Kreispunkte für die Curve Spitzenpunkte bedeuten, als welche sie je vier Elemente repräsentiren. Wenn somit der reelle Singular-

punkt der Curve gleichfalls ein Rückkehrpunkt werden soll, so haben wir in den drei Spitzenpunkten $3 \cdot 4 = 12$ Elemente vertreten, weshalb zur Bestimmung nur mehr zwei Elemente benöthigt werden. Man kann demgemäss den Satz geben: „Zur Bestimmung einer bicircularen Kreisverwandten C_4^4 sind ausser der Angabe des reellen Doppelpunktes noch drei Elemente und für eine ebensolche C_3^4 ausser dem reellen Rückkehrpunkte noch zwei Elemente erforderlich.“

Soll den Intentionen des vorstehenden Satzes entsprochen werden, so wird man z. B. für den ersteren Fall, wo der Doppelpunkte O und etwa drei Curvenpunkte $XX'X''$ gegeben sind, diese letzteren durch Strahlen des O-Punktes verbinden. Die gegen diese Strahlen in den $XX'X''$-Punkten errichteten Senkrechten $\overline{x}\overline{x}'\overline{x}''$ sind Tangenten des Grundkreises k, welcher dem Dreiseite $\overline{x}\overline{x}'\overline{x}''$ einzuschreiben ist. Wir haben uns dabei die betreffende C_4^4 als Fusspunktencurve nach (244) entstanden gedacht. Allein, man erkennt leicht, dass man dem Dreiseite $\overline{x}\overline{x}'\overline{x}''$ viererlei Kreise k einbeschreiben kann, weshalb auch die Aufgabe vier Curvenlösungen gibt.

In der zweiten Aufgabe einer bicircularen C_3^4, wo der Rückkehrpunkt O und zwei Curvenpunkte XX' angegeben sind, erhält man zwei verschiedene Fusspunktencurven (Cardioiden) als Lösungen. Denn die in den Punkten XX' gegen die Strahlen $|OX|$, $|OX'|$ gezogenen Senkrechten $\overline{x}\overline{x}'$ sind Tangenten des Grund-

kreises und O ist ein Punkt desselben. Bekanntlich gibt es aber zweierlei Kreise k, welche ein Paar Gerade berühren und gleichzeitig durch einen Punkt laufen.

Dreizehnter Abschnitt.

Curven dritter Classe.

§ 43. Erzeugung der Enveloppe ein-zweideutiger Punktenreihen.

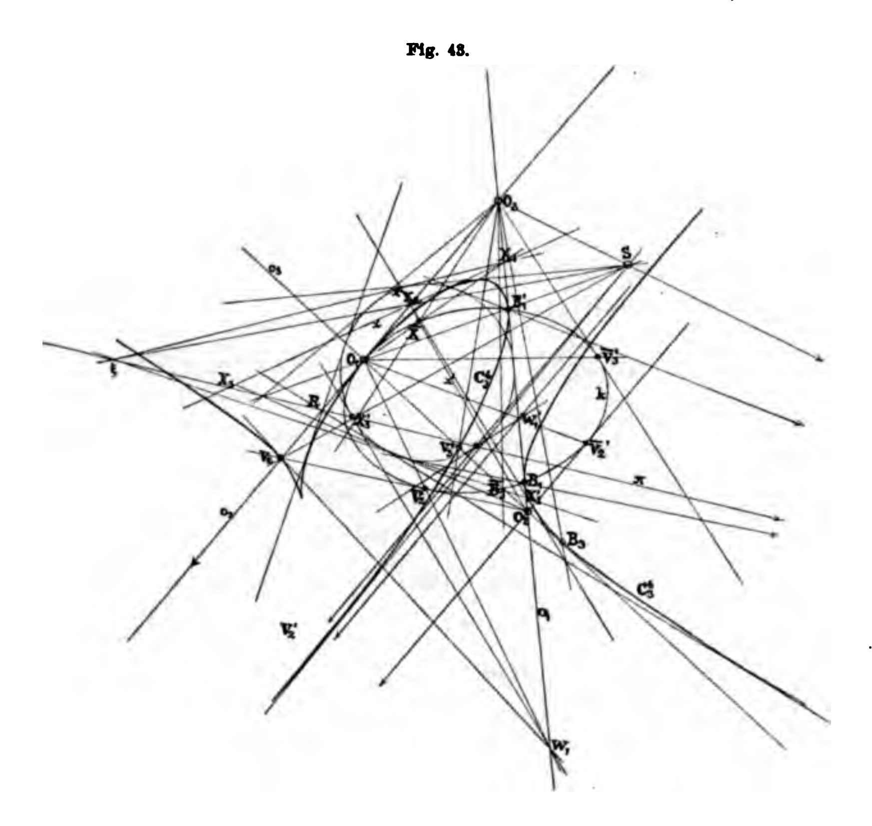
253. Wir sind diesen Curven bisher mehreremale begegnet, wo wir sie als degenerirte einer Curve 4ter Ordnung in Bezug ihrer Classe betrachtet haben. Ihre Erzeugung war dabei durch Strahlenbüschel geschehen, so dass sie als ein geometrischer Ort resultirten. Nur in einem Falle ist uns diese Curvengattung als Enveloppe eines Tangentensystems entgegengetreten, wo sie nämlich als specielle Directionscurve D_3^4 des absoluten Elementensystems der Tangentialpunkte einer C_6^4 vorkommt. (205.)

Es wird einiges Interesse erwecken, die bezeichnete Curvenspecies selbständig einer Untersuchung zu unterziehen, wobei wir hauptsächlich nur deren Erzeugungsweise als einer „Tangentenumhüllten" Rechnung tragen wollen, da die allgemeinen Eigenschaften, sofern wir es mit einer unicursalen Curve 4ter Ordnung zu thun haben, wesentlich nicht beeinträchtigt werden können.

254. Bei den Annahmen (Fig. 43.) gehen wir zunächst in der Ebene von zwei Geraden $o_1 o_2$ aus, deren

Schnittpunkt O_3 ist. Die Gerade o_1 soll Tangente eines Kreises $\varkappa$ sein, auf welchem durch eine dritte Gerade π eine Involution invitirt wird. Diese Involution hat demnach die π-Gerade zur Axe, und

Fig. 48.



ihren einzelnen auf π befindlichen Punktenelementen entsprechen vermittelst der bezüglichen Kreistangenten auf der Tangente o_1 perspectivisch die Punktenpaare einer zweiten Involution. Die einzelnen Punktenelemente ξ des π-Trägers bringen wir durch ein Centrum S, das beliebig wo in der Ebene liegt, mit den Punkten der Geraden o_2 in einen perspectivischen Zu-

sammenhang, und weisen die letzteren Einzelelemente den Elementenpaaren der Involution auf der Trägertangente o_1 projectivisch zu. Auf diese Weise haben wir auf den Geraden $o_1 o_2$ zwei Punktenreihen, die in ein-zweideutiger Beziehung zu einander sind, so dass also jedem Punkte X_2 von o_2 zwei Punkte $X_1 X_1'$ von o_1 entsprechen, umgekehrt aber einem beliebigen Punkte X_1 von o_1 nur ein einziger X_2 von o_2 zukommt. In Folge dessen muss die Enveloppe der Verbindungslinien $|X_2 X_1| \equiv x$, $|X_2 X_1'| \equiv x'$ eine Curve 3[ter] Classe sein (32), was wir übrigens weiter unten noch synthetisch begründen werden.

255. In dem Tangentensysteme der Verbindungslinien x des Curvenerzeugnisses sind die Geraden $o_1 o_2$ als Elemente enthalten, und zwar ist o_1 eine Doppeltangente, während o_2 eine einfache Tangente bildet. Die Curve selbst besitzt eine reelle Spitze, wenn die Doppeltangente o_1 eigentliche Berührpunkte hat; sie kann aber auch bekanntlich (74) drei Spitzen haben, in welchem Falle die Doppeltangente eine ideelle mit imaginären Berührpunkten ist. Das Symbol unserer Curve wird demnach durch: C_3^4 bezeichnet.

Die Berührpunkte $B_1 B_1'$ der Doppeltangente o_1 erhält man als die entsprechenden Elemente des O_3-Punktes, wenn dieser letztere als Element der eindeutigen Reihe auf o_2 angesehen wird. Die Verbindungslinie $|SO_3|$ trifft nämlich die π-Axe in einem Punkte $\mathfrak{x}$, aus welchem an den Constructionskreis $\varkappa$ zwei Tangenten laufen,

die auf dem o_1-Träger das Paar $B_1 B_1'$ ausschneiden, was reell oder imaginär erfolgen wird, je nachdem die Doppeltangente in der Curve beschaffen ist. Letztere Eigenschaft wird aber vornehmlich mit der Lage des bezeichneten ξ-Punktes gegen den Kreis $\varkappa$ zusammenhängen, was leicht zu beurtheilen ist, ob dieser Punkt ausserhalb oder innerhalb von $\varkappa$ liegt.

Der Berührpunkt O_1 der Curventangente o_2 ist stets ein reeller; man findet ihn dadurch, dass man aus O_3 an den Kreis $\varkappa$ die zweitmögliche Tangente zieht und ihren ξ-Punkt auf π mit dem Centrum S verbindet. Letztere Gerade trifft den o_2-Träger in O_1. Aus diesem ξ-Punkte geht an $\varkappa$ noch eine zweite Tangente, die den Träger o_1 in dem Punkte O_2 schneidet. Hieraus ersieht man ohne Schwierigkeit, dass das Punktenpaar $O_3 O_2$ des Trägers o_1 das entsprechende des Punktes O_1 der eindeutigen Reihe auf o_2 ist.

256. Aus der vorliegenden Beziehung folgen unmittelbar jene Kreistangenten, welche sowohl aus dem Perspectivitätscentrum S, als auch aus dem Schnittpunkte R der Geraden $o_2 \pi$ möglich sind, als Curventangenten von C_3^4. Da nun die Doppeltangente o_1 zwei Elemente vertritt, was mit den vier bezeichneten zusammen sechs gemeinschaftliche Tangenten zwischen der Curve und dem Kreise $\varkappa$ ausmacht, so kann es nach der Classenzahl der zwei Curven, in Uebereinstimmung mit dem Gesetze in (10), keine weiteren gemeinschaftlichen Tangenten geben.

Von grösserer Wichtigkeit sind die Verzweigungselemente $V_2 V_2'$, welche sich auf der Tangente o_2 vorfinden. Wir bekommen sie direct mittelst derjenigen Strahlen des S-Centrums, welche die zwischen dem π-Träger und dem Kreise $\varkappa$ gemeinsamen ξ-Punkte verbinden. Zieht man in diesen ξ-Punkten die einzig möglichen Kreistangenten, so treffen sie den o_1-Träger in den Doppelpunkten $W_1 W_1'$ der auf ihm befindlichen Involution. Die Verbindungslinien $|W_1 V_2|$, $|W_1' V_2'|$ sind die Verzweigungstangenten der Punkte $V_2 V_2'$. Die Tangente o_2, welche die Curve C_3^4 im O_1-Punkte berührt und noch in den Punkten $V_2 V_2'$ schneidet, kann ausser den letzteren, vermöge ihrer Ordnung, keine weiteren Punktenelemente mit ihr gemeinschaftlich haben. Diese letzteren sind also ihre Tangentialpunkte.

Auf der Doppeltangente o_1 besteht zwischen ihren Berührpunkten $B_1 B_1'$ und den Doppelelementen $W_1 W_1'$ der auf ihr befindlichen Punkteninvolution die Harmonität:

$$(B_1 B_1',\ W_1 W_1') = -1.$$

§ 44. Abbildung auf einem Grundkegelschnitte.

257. Man kann die Curve C_3^4 mit einem Kegelschnitte k in eine polar-reciproke Verwandtschaftsbeziehung bringen, deren Grundsätze wir im VI. Abschnitte auseinandergesetzt haben, wobei jedoch gewisse Besonderheiten hervorzuheben kommen. Die Figur $O_1 O_2 O_3$ mit den gegenüberliegenden Seiten

$o_1 o_2 o_3$ bildet in dieser Verwandtschaft 2ten Grades das Hauptdreieck in solcher Weise, dass dem O_3-Punkte jene ausgezeichnete, von den Eigenschaften des Punktenpaares $O_1 O_2$ abweichende Rolle zukommt, welche am bezeichneten Orte charakterisirt worden ist.

Eine beliebige x-Tangente der C_3^4 trifft die Seiten $o_1 o_2 o_3$ des Hauptdreiecks in dem Punktentripel $X_1 X_2 X_3$. Der Schnittpunkt:

$$(|X_1 O_1|, |X_2 O_2|) \equiv \overline{X}$$

ist (145) ein Element des oben angesagten Kegelschnitts k, welcher sich demnach als geometrischer Ort des $\overline{X}$-Punktes im dualen Gegensatze mit der x-Tangentenenveloppe C_3^4 herausstellt, d. h. den $\overline{X}$-Punkten des Kegelschnitts k entsprechen die x-Tangenten der Curve C_3^4, keineswegs aber umgekehrt. Wir werden deshalb k als den Grundkegelschnitt bezeichnen können.

Die besondere Rolle, welche den Hauptpunkt O_3 vor dem Paare $O_1 O_2$ auszeichnet, ist bekanntlich (141) darin gelegen, dass der Verbindungsstrahl $|O_3 X_3|$ der harmonisch conjugirte des Strahles $|O_3 \overline{X}|$ in Bezug der Hauptlinien $o_1 o_2$ ist. Aus diesem Grunde wird auch jener Punkt B_3, in welchem die C_3^4 von der Seite o_3 berührt wird, harmonisch in Bezug des Linienpaares $o_1 o_2$ demjenigen Punkte $\overline{B}_3$ des Grundkegelschnitts zugeordnet erscheinen, in welchem dieser von der Hauptlinie o_3 frei geschnitten wird.

258. Die ursprüngliche Erzeugung der Enveloppe C_3^4 aus den zwei ein-zweideutigen Reihenträgern $o_2 o_1$ resultirte sie als dem Dreiecke $O_1 O_2 O_3$ einbeschrieben*), wobei die Seite o_1 als Doppeltangente in den Berührpunkten $B_1 B_1'$ auftrat. Die Erzeugungsweise des Grundkegelschnitts k begreift in sich, dass jene Berührelemente des Seitenpaares $o_1 o_2$ der Curve offenbar diesem Kegelschnitte ebenfalls eigenthümlich sind, und zwar geht deutlich hervor, der Grundkegelschnitt k besitzt sowie die C_3^4 die o_2 im Hauptpunkte O_1 als gemeinschaftliche Tangente, während die Berührpunkte $B_1 B_1'$ der Curven-Doppeltangente o_1 ihm nur als einfache Schnittelemente angehören. Diese letzteren können reell, imaginär oder coincidirend sein, in welchen Fällen die o_1-Gerade eine eigentliche, eine ideelle Doppeltangente oder eine Inflexionstangente ist. Im Falle einer Inflexionstangente der o_1 vermag jedoch die Curve ihre Ordnung nicht mehr aufrecht zu erhalten, und degenerirt in eine Curve 3ter Ordnung und Classe, womit wir uns hier nicht, wohl aber späterhin beschäftigen werden.

Ausser dem O_1-Hauptpunkte und dem oben (257) bezeichneten Berührpunkte B_3 hat die Curve C_3^4 auf der Hauptseite o_3 noch einen dritten Punkt V_3' als viertes Element gemein, der sich offenbar als harmonisch conjugirt bezüglich der Hauptlinien $o_1 o_2$ zu jenem Strahle des O_3-Punktes zeigen muss, welchen man noch an den Grundkegelschnitt k ziehen kann.

*) Vergl. (149) u. s. w.

Projicirt man dessen Berührpunkt $\overline{V}_3'$ aus den Hauptpunkten $O_1 O_2$ auf die Hauptlinien $o_1 o_2$, so ist die Verbindungslinie dieser beiden Projectionspunkte die in V_3' laufende Curventangente.

Aus ganz analogen Gründen werden die in den Berührpunkten $\overline{V}_2 \overline{V}_2'$ der aus O_2 an den Kegelschnitt k gehenden Tangenten die Hauptlinie o_2 in den oben angemerkten Verzweigungspunkten $V_2 V_2'$, d. s. die Tangentialpunkte der Curventangente o_2, direct treffen, und somit werden auch die Geraden $|O_1 \overline{V}_2|$, $|O_2 \overline{V}_2'|$ die Hauptlinie o_1 in den Doppelelementen $W_1 W_1'$ der auf ihr befindlichen Involution schneiden. Die Gegenseitigkeit dieser Beziehungen für die Construction zwischen Grundkegelschnitt und der Curve C_3^4 liegt auf der Hand und bedarf keines weiteren Hinweises.

259. Die harmonischen Eigenschaften, welche nach (257) die Strahlen des Hauptpunktes O_3 paarweise in Bezug des Linienpaares $o_1 o_2$ verbinden, führen uns im übertragenen Sinne zu einer Construction des Berührpunktes X einer x-Tangente der Curve C_3^4. Ist nämlich der einer x-Tangente entsprechende $\overline{X}$-Punkt als Schnitt der Strahlen $|O_1 X_1|$, $|O_2 X_2|$ bekannt geworden, so braucht man nur die in diesem Punkte gehende Tangente $\overline{x}$ des Grundkegelschnitts k zu suchen, und es besteht dann die Harmonität der Strahlen:

$$(|O_1 X_1|, \ |O_2 X_2|; \ \overline{x}, \ |\overline{X} X| = -1,$$

deren Centrum der Kegelschnittspunkt $\bar{X}$ ist. Der Strahl $|\bar{X}X|$ trifft die Curventangente x in ihrem Berührpunkte X.

§ 45. Das Fundamental-Kegelschnittsnetz und seine Involutionen auf dem Grundkegelschnitte.

260. Der oben angezeigte Nachweis, dass das Curvenerzeugniss von der 3ten Classe ist, wird jetzt durch die folgende Untersuchung evident. Ein beliebiger Punkt G in der Ebene der Curve C_3^4 ist Träger eines Strahlenbüschels. Den Strahlenelementen dieses Büschels entsprechen nach der Beziehung Punkte, deren Ort ein Kegelschnitt γ ist, der dem Hauptdreieck $O_1 O_2 O_3$, wie man sich (146) leicht überzeugen wird, umschrieben ist. Die Verbindungslinien $|G O_1|$, $|G O_2|$ sind unmittelbar Tangenten dieses Kegelschnitts in den Hauptpunkten $O_1 O_2$, während die Tangente des O_3-Punktes der in Bezug des Linienpaares $o_1 o_2$ harmonisch zugeordnete Strahl des Hauptstrahles $|O_3 G|$ ist. Man sieht deutlich aus der vorigen Eigenschaft der aus G nach den Hauptpunkten $O_1 O_2$ laufenden Tangenten des betrachteten Kegelschnitts γ, dass die Hauptlinie o_3 Polare des G-Punktes in Bezug dieses Kegelschnitts ist, und dass diese Eigenschaft constant für jeden beliebigen Punkt der Ebene vis a vis seinem entsprechenden γ-Kegelschnitt erhalten bleibt.

Ausser dem Hauptpunkte O_1 hat der Kegelschnitt γ mit dem Grundkegelschnitte k noch drei gemeinschaftliche Punktenelemente, und es sind die diesen

letzteren entsprechenden x-Geraden nichts anderes, als jene aus dem G-Centrum möglichen drei Tangenten der C_3^4.

Ist der G-Punkt identisch einem Curvenpunkte, so fallen zwei von den drei Tangenten zusammen, und man kann dann nur mehr eine einzige Tangente aus ihm an die C_3^4 ziehen. Das Bild des bezüglichen Strahlenbüschels G ist ein Kegelschnitt γ, welcher den Grundkegelschnitt k einfach berührt etc. Aus dieser Untersuchung geht der Satz hervor: „Den gesammten Punkten der Ebene in der Curve C_3^4 entspricht ein Kegelschnittsnetz mit den Basispunkten $O_1 O_2 O_3$."

261. Wir legen uns jetzt eine beliebige Gerade g in der Ebene der C_3^4 vor, und stellen die Frage nach dem dieser Geraden entsprechenden Gebilde im Systeme des Grundkegelschnitts k. Wir wissen, dass der Geraden g, wenn wir sie als einen Strahl betrachten, der die Hauptlinien des Dreiecks $O_1 O_2 O_3$ schneidet, ein Punkt $\overline{G}$ entspricht, der im Allgemeinen dem Grundkegelschnitte k nicht angehört. Wenn wir jedoch die Gerade g als Punktenträger ansehen, so entsprechen den Elementen derselben γ-Kegelschnitte des Netzes, das vorhin definirt wurde, die aber jetzt auch gemeinsam den $\overline{G}$-Punkt besitzen und somit ein Büschel mit den Basispunkten $O_1 O_2 O_3 \overline{G}$ formiren. In diesem Büschel wird es vier Individuen geben, welche den Grundkegelschnitt einfach berühren, und deren

Berührungspunkte sind offenbar die Bilder jener Tangenten der Curve C_3^4, deren Berührpunkte gleichzeitig die mit der g-Geraden gemeinschaftlichen vier Elemente sind, wie es die Ordnung der Curve verlangt.

Es lässt sich aber auch nachstehendes Raisonnement anstellen. Jedes γ-Individuum des Kegelschnittsbüschels trifft den Grundkegelschnitt k, ausser in dem erwähnten Hauptpunkte O_1, noch in drei Punkten. Diese Punktentripel formiren auf dem Grundkegelschnitte eine cubische Involution (§ 9), deren Involutionskegelschnitt den Grundkegelschnitt in den vier Doppelelementen dieser Involution schneidet, welche dann ebenso, wie vorher, die zwischen der g-Geraden und der C_3^4 gemeinsamen Elemente angeben.

Ist die g-Gerade die unendlich ferne der Ebene, so werden hierdurch die Asymptotenelemente der Curve C_3^4 fixirt, woraus wir gleichzeitig erkennen und bestätigt finden, dass eine C_3^4 vier, zwei oder keine reellen Asymptoten besitzt, in welchem letzten Falle sie im Endlichen in sich zurücklaufend ist.

Im Falle die g-Gerade eine x-Tangente mit dem Berührpunkte X in der Curve C_3^4 ist, so werden ihren gesammten Punktenelementen die γ-Individuen eines Kegelschnittsbüschel mit den Basispunkten $O_1 O_2 O_3 \overline{X}$ entsprechen, wobei der $\overline{X}$-Punkt das Bild der x-Tangente und ein Punkt des Grundkegelschnitts k ist. Von diesen vier Basispunkten gehören also nur O_1 und $\overline{X}$ dem Grundkegelschnitte k an und es wird demnach dieser letztere von jedem Büschel-

individuum γ ausserdem in einem Punktenpaare geschnitten. Alle Punktenpaare dieser Art sind conjugirte Elemente einer quadratischen Involution, deren Doppelelemente bekanntlich durch die aus dem bezüglichen Involutionscentrum an den Grundkegelschnitt gezogenen Tangenten hervorgehen. Den Berührpunkten $\overline{X}'\overline{X}''$ dieser Tangenten, welche somit die Doppelpunkte der Involution auf k sind, entsprechen in der Curve C_3^4 zwei Tangenten $x'x''$, und diese verschneiden sich mit der x-Tangente in zwei Punkten $X'X''$, die nichts anderes als die Tangentialpunkte der x-Tangente vorstellen.

262. Unsere Betrachtungen haben gezeigt, dass einem beliebigen Punkte in der Ebene einer C_3^4 ein γ-Kegelschnitt des Netzes $O_1 O_2 O_3$ bildlich entspricht, und dass speciell jedem Curvenpunkte ein solches γ-Individuum zugeordnet erscheint, welches den Grundkegelschnitt einfach berührt (259); der gemeinschaftliche Berührpunkt ist dann das Abbild der in dem Curvenpunkte laufenden Tangente. Wenn nun letztere eine Spitzentangente ist, welche also, wie bekannt, eine Coincidenz von drei Tangentenelementen ausspricht, so muss ihr nothwendig im Netze $O_1 O_2 O_3$ ein Kegelschnitt zukommen, der den Grundkegelschnitt k in dem Bildpunkte der Spitzentangente osculirt. Weil der Grundkegelschnitt k den einen Basispunkt O_1 des Netzes enthält, so gibt es höchstens drei ihn osculirende Kegelschnitte des Netzes, deren

Osculationspunkte den drei Spitzentangenten der C_3^4 entsprechen, welche dann reell vorkommen, wenn die Doppeltangente o_1 ideell ist, wie schon oben bemerkt wurde. Diese drei Osculationspunkte sind die Doppelelemente von zwei auf dem Grundkegelschnitte k conlocalen ein-zweideutigen Systemen und gehören gleichzeitig einem Kegelschnittsindividuum des Netzes $O_1 O_2 O_3$ an. Aus letzterem Grunde müssen sich die entsprechenden drei Spitzentangenten der Curve C_3^4 in einem Punkte der Ebene schneiden, was nur eine Bestätigung der in (75) gefundenen Eigenschaft aussagt.

Ist eine Spitzentangente einer C_3^4 bekannt, so wird man mit Hilfe der Constructionsbeziehung in (259) anstandslos ihren Rückkehrpunkt ermitteln.

Vierzehnter Abschnitt.

Formation und Verlauf einer unicursalen Curve vierter Ordnung.

§ 46. Zusammenfassung der bezüglichen Resultate.

263. Mannigfaltig sind die Bedingungen, welche auf die Gestalt einer unicursalen Curve 4ter Ordnung Einfluss nehmen. Wir haben wiederholt Gelegenheit gefunden, darauf hinzuweisen, wie wesentlich der Verlauf einer Curve z. B. von der Realität der ihr eigenen Asymptotenelemente abhängt, und konnten diesbezüglich sogar eine selbständige Eintheilung wie in (77) vornehmen. Allein damit ist die eigentliche

Formation einer solchen Curve noch nicht erschöpft; diese wird sich vielmehr auch mit dem Vorkommen von eigentlichen oder ideellen Doppeltangenten, von der Anzahl der reellen oder imaginären Inflexionen, ja insbesondere auch von der Art ihrer Singularpunkte unterscheiden lassen.

Ist etwa eine Curve mit drei Doppelpunkten gegeben, so ist es für ihren gestaltlichen Verlauf durchaus nicht gleichgiltig, ob diese Punkte Knoten, Einsiedler oder Spitzen bedeuten, oder ob sie die ausnahmsweise Charakterisirung eines Berührknotens, einer Knotenspitze oder einer Schnabelspitze oder gar eines dreifachen Punktes bezeichnen. Denken wir uns z. B. den Fall, dass die Curve nur imaginäre Asymptoten besitzt, so kann man besonders die drei soeben charakterisirten Fälle unterscheiden: Entweder sind die Doppelpunkte $O_1 O_2 O_3$ Knoten; der Grundkegelschnitt schneidet das Hauptdreieck so, dass die Hauptpunkte $O_1 O_2 O_3$ ausserhalb oder innerhalb liegen, wobei Schlingencurven gebildet sind, die nur imaginäre Inflexionen, hingegen drei eigentliche Doppeltangenten zeigen. Oder die Doppelpunkte sind Einsiedler, wobei der Grundkegelschnitt ganz im Innern des Dreiecks $O_1 O_2 \bar{O}_3$ liegt, und die Curve sechs reelle oder auch imaginäre Inflexionen hat. Oder endlich der in (75) betrachtete Fall, in welchem eine C_3^4 mit drei Spitzen gegeben ist, die einen Kegelschnitt k bedingt, welcher das Hauptdreieck $O_1 O_2 \bar{O}_3$ im Innern berührt, wo in der C_3^4 keine

Inflexionen und nur eine ideelle Doppeltangente vorkommen.

264. Unicursale Curven 4ter Ordnung können nur eintheilig sein, d. h. sie können nicht etwa aus zwei oder mehreren in sich abgeschlossenen Theilen bestehen, sondern nur aus Aesten, die paarweise durch Asymptotenelemente zusammenhängen, wodurch jeder sogenannte einseitige ovalförmige Abschluss ausfällt. Wohl aber wird es vorkommen können, dass bei isolirten Doppelpunkten die Curve ovalartig ohne eigentliche Doppeltangenten und ohne reelle Inflexionen in sich zurückläuft, wobei sie selbstverständlich ebenfalls nur imaginäre Asymptoten haben wird. Dieser letztere Fall kann insbesondere dann stattfinden, wenn die Curve eine „Kreisverwandte" ist, d. h. wenn der Grundkegelschnitt in einen Kreis übergeht, der mit den Seiten seines Hauptdreiecks keinen Punkt gemein hat. Wird jedoch für einen solchen Fall eine Doppeltangente eine eigentliche, so bedingt sie jedesmal ein Paar reelle Inflexionen, deren Anzahl mit drei Doppeltangenten erschöpft ist. Mehr als drei eigentliche Doppeltangenten kann also eine Curve 4ter Ordnung mit isolirten Doppelpunkten nicht besitzen, und es wird die vierte immer ideell sein müssen.

Wenn man hingegen die Doppelpunkte sämmtlich als Knoten voraussetzt, so werden im Allgemeinen stets drei der Doppeltangenten eigentliche und die eine ideell sein, wobei es keine reellen Inflexionen

geben kann. Dieser Fall wird eintreten, wenn der Grundkegelschnitt eine Ellipse oder ein Kreis ist, der sein Hauptdreieck umschliesst, ohne dass er irgend einen Punkt des Hauptkreises enthält, und ebenfalls, wenn er sein Hauptdreieck derart in den drei Seiten desselben schneidet, dass dessen Ecken ganz ausserhalb liegen. Es gibt aber einen Fall, in dem der Grundkegelschnitt eine Hyperbel ist, wo die Plancurve im Endlichen ohne Asymptoten verläuft und alle vier Doppeltangenten mit eigentlichen Berührpunkten enthält. In diesem Falle besitzt sie auch ein Paar reelle Inflexionen, welche die eine Doppeltangente begleiten. (Art. 86., Fig. 14.)

Der Zusammenhang zwischen Doppel- und Wendetangenten in einer Curve 4ter Ordnung ist demnach für ihre gestaltlichen Verhältnisse in gleichem Maasse von Einfluss, wie das Vorkommen von Asymptotenelementen, wie wir schon oben bemerkten. Einen besonderen Charakter aber nehmen die betreffenden Curven dann an, wenn ihre Doppelpunkte zu sogenannten Inflexionsknoten werden, auf welche Eigenschaft im V. Abschnitte hingewiesen ist.

265. Nicht minder, als durch die vorangestellten Eigenschaften von Asymptoten- und Inflexionselementen, wird die Form einer Curve 4ter Ordnung von der Realität der sogenannten Verzweigungselemente abhängig. Aus dem Vorhergehenden ist zu entnehmen, dass isolirte Doppelpunkte in der Regel reelle Ver-

zweigungen und zwar paarweise bedingen. Wenn aber ein Doppelpunkt einer Curve einen Knoten bildet, so sind ein Paar reelle Verzweigungspunkte demselben nur dann conjugirt, wenn sich von dem homologen Hauptpunkte an den Grundkegelschnitt Tangenten ziehen lassen. Schliesst der Grundkegelschnitt einen solchen Hauptpunkt in sein Inneres, so kann man auch von dem ihm entsprechenden Doppelpunkte keine Tangenten an die Curve ziehen, weshalb die betreffenden Verzweigungselemente imaginär sind. Diese Eigenschaft, in dem einen oder in dem anderen Sinne, trägt aber wesentlich mit bei, den Verlauf und die Gestalt der Curve zu charakterisiren.

Inwiefern die Realität der Doppelpunkte einer Curve 4ter Ordnung ihre Formation beeinflusst und ihren Charakter specialisirt, zeigt der XI. und XII. Abschnitt dieses Buchteiles, würde aber durch eingehendere Untersuchungen noch besonders hervortreten, wobei nur wiederholt zu bemerken ist, dass Doppelpunkte stets paarweise imaginär sind und also unicursale Curven 4ter Ordnung nur mit drei oder einem reellen Doppelpunkte vorkommen können.

Dritter Theil.

Die Unicursal-Plancurven dritter Ordnung.

Erster Abschnitt.

Die Curven vierter Classe.

§ 1. Erzeugnisse ein-zweideutiger Strahlenbüschel.

266. Curven, welche mit einer beliebigen Geraden ihrer Ebene nicht mehr als höchstens drei Punkte gemeinschaftlich haben, von denen zwei imaginär sein können, sind 3[ter] Ordnung. Nach (6) enthält eine solche Curve, falls sie nicht allgemein ist, $\frac{(3-1)(3-2)}{2}$ $= 1$ Doppelpunkt und keinerlei Doppeltangenten, weshalb sie dann vom Geschlechte $p = o$ d. h. unicursal ist. Die Classe einer solchen Curve ist nach (8) $3(3-1) - 2 \cdot 1 = 4$ und somit das Symbol: C_4^3. Nur diese Art Curven 3[ter] Ordnung, deren Classe die Zahl 4 nicht übersteigt, ist der Betrachtung in diesem Buche unterzogen. Dabei muss berücksichtigt werden, dass die Ordnungszahl 3 eine Herabsetzung der Classenzahl 4 höchstens noch um eine Einheit verträgt, weil die Classe 2 auch die Ordnung 2 bedingt, wodurch sich bekanntlich die Curve als Kegelschnittslinie geriren würde.

Der Doppelpunkt einer C_4^3 kann jedenfalls ein Knoten oder ein Einsiedler sein, was der Classe der Curve keinen Eintrag macht; sowie er aber zu einem

Rückkehrpunkte wird, degenerirt nach Formel (8) die Classe, und die Curve erhält das Symbol C_3^3. Wir werden demgemäss diese beiden Fälle in manchen Beziehungen getrennt betrachten müssen, obgleich der allgemeine Charakter dieser Curven, als solcher 3ter Ordnung, dadurch keine Einbusse erleidet. Es wird sich weiter bei vielen Gelegenheiten ergeben, dass man eine Curve 3ter Ordnung als Specialität oder, wenn wir wollen, als eine Degenerirte einer Curve 4ter Ordnung ansehen muss, oder auch, dass sie bei einer Specialisirung in der sonst allgemein bedingten Grundlage für die Erzeugung einer Curve 4ter Ordnung als ein Theilerzeugniss auftritt, welches, mit einer Geraden zusammengenommen, die Curve von der 4ten Ordnung ausmacht. Solche Specialisirungen werden die folgenden Untersuchungen mehrfach ergeben, aber auch den Anlass bieten, das Studium der vorliegenden Curven erheblich einfacher, fruchtbringender und genussreicher zu gestalten, als solches der Fall gewesen wäre, wenn wir diese Curvengattung selbstständig, ohne den bemerkten Zusammenhang und ohne Berufung auf die allgemein feststehenden Gesetze, welche die Curven 4ter Ordnung in sich aufnehmen und vorausschicken, angeordnet haben würden.

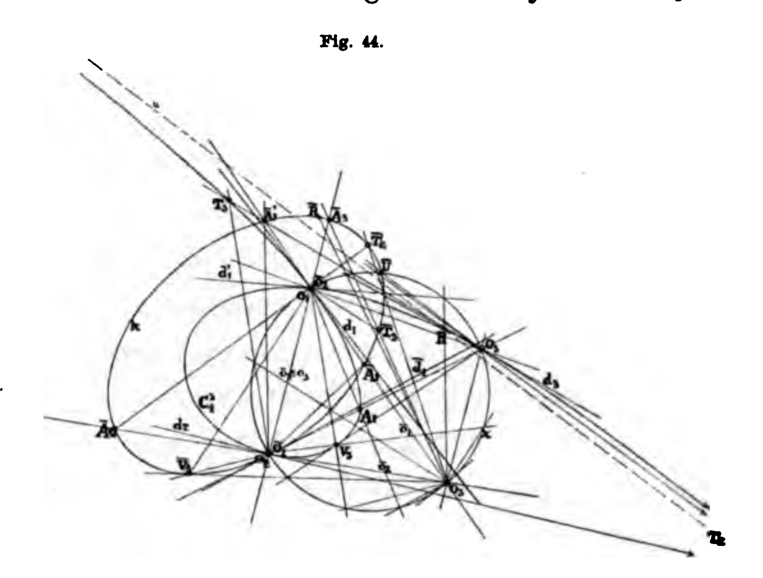
276. Eine unicursale Curve 3ter Ordnung kann als Erzeugniss von ein-zweideutigen Strahlenbüscheln hervorgehen, in welchem Falle sie ein geometrischer Ort ist. Als solcher entsteht sie auch weiter in den

Schnittpunkten von zwei projectivischen Kegelschnittsbüscheln, welche ein Netz mit drei Grundpunkten bilden. Endlich kann eine solche Ortscurve noch aus dem Schnitte eines Strahlenbüschels mit einer ihm projectivischen quadratischen Tangenteninvolution resultiren. In jedem dieser Erzeugungsfälle werden gewisse specielle Zuordnungen der zu Grunde gelegten Gebilde stattfinden müssen, soll nicht eine Curve 4ter Ordnung, wie der zweite Theil dieses Buches gezeigt hat, entstehen. Immer aber werden wir in die Lage kommen, mit dem betreffenden Annahmefall eine quadratische Verwandtschaft zwischen der erzeugten Curve 3ter Ordnung und einem Kegelschnitte einzurichten, wodurch wir die erstere als eine Abbildung des letzteren erkennen und umgekehrt, wie analog bei den abgehandelten Curven 4ter Ordnung zum Nutzen ihres Studiums ausgegangen worden ist.

Um demnach vor Allem den letzteren Voraussetzungen gerecht zu werden, werden wir (Fig. 44.) nach (48) i) zwei Hauptdreiecke $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$, $O_1O_2O_3$ und einen etwa durch den $\bar{O}_1$-Punkt gehenden Kegelschnitt k als Grundcurve so annehmen, dass die beiden Hauptdreiecke die dort bezeichnete Situation einnehmen, und also auf dem gemeinschaftlichen Hauptkreise $\varkappa$ die Coincidenzen $\bar{O}_1 \equiv O_2$, $\bar{O}_2 \equiv O_1$ stattfinden, während die Hauptpunkte $\bar{O}_3 O_3$ in einer zur Hauptlinie $\bar{O}_1\bar{O}_2 \equiv O_2O_1 | \equiv \bar{o}_3 \equiv o_3$ parallelen Geraden liegen und die ihnen zukommende Eigenschaft, als Perspectivitätscentra der gedachten Systeme $\Sigma\bar{\Sigma}$,

in sich begreifen. Wir wissen, dass dann das Bild von k im Sinne der quadratischen Verwandtschaft eine Curve von dem allgemeinen Symbole C_4^3 sein

Fig. 44.



muss, welche den O_1-Punkt als Doppelpunkt hat. Die Punkte $O_2 O_3$, deren letzterer der homologe von $\bar{O}_3$ ist, sind einfache Punktenelemente von C_4^3, wie aus den folgenden Untersuchungen hervorgehen wird.

Die Sache lässt sich aber auch umkehren, indem die Curve C_4^3 als gegeben vorausgesetzt wird. Nun wissen wir aus (4), dass von einer Curve C_4^3: $\frac{3(3+3)}{2} = 9$ Punktenelemente bekannt sein müssen, sofern dieselbe als bestimmt angesehen werden soll. Da a priori der Doppelpunkt der Curve als gegeben vorausgesetzt werden möge, dieser aber für drei Bedingungen gezählt ist, folgen noch weitere sechs Elemente, die zur Angabe der C_4^3 nothwendig sind.

Setzen wir dieselben vor der Hand als Punkte voraus, so wird man zwei derselben mit dem Doppelpunkte zu einem Hauptdreiecke $O_1 O_2 O_3$ vereinigen können. Nach unseren obigen Annahmen zählt der Punkt $O_3 \equiv \bar{O}_1$ als Element des Kegelschnitts k, und wir erhalten in ihm und mit den Bildern der restlichen vier Curvenpunkte zusammen fünf Elemente, welche den Grundkegelschnitt k vollkommen bestimmen.

§ 2. Die quadratische Abbildung.

268. Nach den Erörterungen des vorigen Artikels ist man berechtigt, den Grundkegelschnitt k als das Bild einer bestimmten Plancurve C_4^3 voraussetzen zu dürfen, von welcher das Hauptdreieck $O_1 O_2 O_3$ bekannt ist. Gemäss den Erklärungen des IV. Abschnittes der Einleitung haben wir dem Dreiecke $O_1 O_2 O_3$ den Hauptkreis $\varkappa$ zu umschreiben, und erhalten mit der zu $|O_1 O_2|$ durch den O_3-Punkt gleichlaufenden Geraden am Hauptkreise $\varkappa$ den Hauptpunkt $\bar{O}_3$ des Grundkegelschnitts-Systems. Die Construction eines beliebigen Curvenpunktes X von C_4^3 geschieht nach der Ableitung in (58): „Ist $\bar{X}$ der entsprechende Bildpunkt auf dem Grundkegelschnitte k, so fesseln wir ihn durch Strahlen der Hauptpunkte $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$. Die entsprechenden Strahlen in den Hauptpunkten $O_1 O_2 O_3$ treffen sich gemeinsam in X.“ So findet man z. B. den entsprechenden Strahl von $|\bar{O}_1 \bar{X}|$, wenn man den Hauptkreisschnitt des durch $\bar{O}_3$ zu $|\bar{O}_1 \bar{X}|$ parallelen Strahles mit O_1 verbindet. Analog

ergibt sich der zur Geraden $|\bar{O}_2\bar{X}|$ entsprechende Strahl $|O_2X|$. Der dem Strahle $|\bar{O}_3\bar{X}|$ entsprechende (homologe) Strahl bestimmt sich unmittelbar als die Verbindungslinie desjenigen Hauptkreisschnittes, welchen der Strahl $|\bar{O}_3\bar{X}|$ erzeugt, mit dem Hauptpunkte O_3.

Selbstverständlich ist der bezeichnete Zusammenhang der Abbildung zwischen der Curve C_4^3 und dem Grundkegelschnitt k wechselseitig, wie schon oben hervorgehoben ist, und wir wollen uns jede der genannten zwei Curven in den in der Ebene zusammenliegenden Systemen $\Sigma\bar{\Sigma}$ denken, wie solches auch früher vorausgesetzt worden war. In jedem Systeme $\Sigma\bar{\Sigma}$ sind dann die Hauptpunkte desselben Centra von Strahlengebilden, deren Erzeugnisse entweder die Curve C_4^3 oder der Grundkegelschnitt k sind. Im $\bar{\Sigma}$-System ist jedes der Strahlenbüschel $\bar{O}_2\bar{O}_3$ mit dem Büschel $\bar{O}_1$ in ein-zweideutiger Beziehung und reducirter Lage (32), weshalb auch ihr Erzeugniss der Kegelschnitt k ist. Bei der Uebertragung in das Σ-System geht die reducirte Lage für die den vorigen homologen Büschel O_2O_3, O_1 in eine allgemeine Lage über, aus welchem Grunde jetzt das Erzeugniss dieser eine Curve 3ter Ordnung wird, in welcher das Centrum des zweideutigen Büschels O_1 der Doppelpunkt ist, während die Centra O_2O_3 einfache Punktenelemente sind.

Etwas anders verhält sich die Sache, wenn im $\bar{\Sigma}$-System die Büschel der Hauptpunkte $\bar{O}_2\bar{O}_3$ zur Erzeugung des Kegelschnitts k herangezogen werden.

Als Involutionen vereinigen dieselben in der Hauptseite $|\bar{O}_2\bar{O}_3| \equiv \bar{o}_1$ zwei Paare entsprechender Strahlen von zwei in reducirter Lage befindlichen zweideutigen Büscheln, deren Erzeugniss k ist; bei der quadratischen Transformation in das Σ-System nach den zweideutigen Büscheln $O_2 O_3$ geht die reducirte Lage nicht vollständig verloren, weil die der Hauptseite $\bar{o}_1$ homologe $|O_2 O_3| \equiv o_1$ noch immer ein Paar entsprechender Strahlen der Büschel $O_2 O_3$ ausdrückt, und man könnte aus diesem Grunde die Lage als eine „halbreducirte“ bezeichnen. Die beiden zweideutigen Strahlengebilde $O_2 O_3$ erzeugen nun allerdings, wie es nach (55) sein muss, eine Curve 4ter Ordnung und zwar mit vier Doppelpunkten; allein vermöge ihrer speciellen, halb reducirten Lage wird sie repräsentirt durch die C_4^3 im Zusammenhang mit der Hauptseite o_1, welche letztere als Theilerzeugniss (4) betrachtet werden muss.

269. Die sogenannten (unendlich nahen) Nachbarpunkte (64) des Doppelpunktes O_1 bilden sich in jenem Punktenpaare $\bar{A}_1 \bar{A}_1'$ ab, in dem die Hauptlinie $\bar{o}_1 \equiv |\bar{O}_2 \bar{O}_3|$ den Grundkegelschnitt trifft. Der O_1-Punkt ist ein Knoten oder ein isolirter Punkt, wenn das $\bar{A}_1 \bar{A}_1'$-Paar reell oder imaginär vorhanden ist. Der Fall, wo eine Coincidenz der $\bar{A}_1 \bar{A}_1'$-Punkte vorkommt, also die Hauptlinie $\bar{o}_1$ den Grundkegelschnitt tangirt, bedingt in O_1 einen Rückkehrpunkt mit einer Spitze der Erzeugnisscurve, wodurch deren Classe degenerirt und sie vom Symbole C_3^3 wird.

§ 3. Das Fundamentalnetz der Kegelschnitte.

270. Das Bild einer beliebigen Geraden g im Curvensysteme Σ ist ein dem Hauptdreiecke $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ umschriebener Kegelschnitt γ, wodurch das Fundamental-Kegelschnittsnetz im Systeme $\bar{\Sigma}$ entsteht. Ein solcher Kegelschnitt γ kann den Grundkegelschnitt k, da er den $\bar{O}_1$-Punkt a priori besitzt, nur noch in drei Punkten 1 2 3 schneiden; die Bilder I II III dieser Punkte sind die Elemente, welche die g-Gerade mit der C_4^3 gemeinschaftlich hat, wodurch deren Ordnungszahl erwiesen ist. Von diesen drei Schnittpunkten können zwei imaginär sein, weil der Kegelschnitt γ ebenfalls mit k noch zwei Punkte imaginär enthalten kann; jedenfalls muss er aber ausser dem O_2-Punkte noch einen reellen Punkt mit dem Grundkegelschnitt gemein haben, woraus wir folgern: „Eine Curve 3[ter] Ordnung besitzt mit irgend einer Geraden ihrer Ebene mindestens einen reellen Punkt."

Der Kegelschnitt γ kann nach dem in (268) angemerkten Constructionsgesetze punktenweise bestimmt werden. Sind von der g-Geraden zwei Curvenpunkte $X'X''$ bekannt, so kann man den dritten Punkt X''' sehr einfach linear erhalten, wenn man die Construction in (61) entsprechend auf nachfolgende Weise (Fig. 45.) modificirt. Die Bilder $\bar{X}'\bar{X}''$ werden aus den Hauptpunkten $\bar{O}_2\bar{O}_3$ nach $\bar{X}_2'\bar{X}_2''$, $\bar{X}_3'\bar{X}_3''$ auf den Grundkegelschnitt k projicirt; nun folgt der Punkt ξ_1 auf $\bar{o}_1$:

$$(|\overline{\bar{X}_2'\bar{X}_3''}|, |\overline{\bar{X}_2''\bar{X}_3'}|) \equiv \xi_1.$$

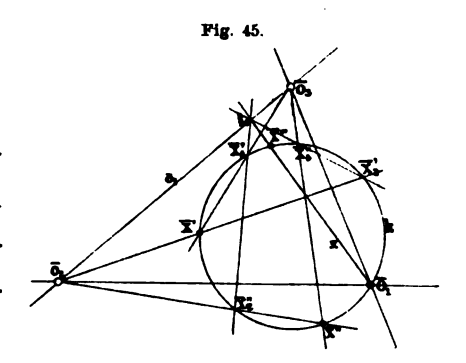


Fig. 45.

Der Strahl

$$|\overline{O}_1\xi_1| \equiv x$$

zeigt auf dem Grundkegelschnitt das Bild $\overline{X}'''$ des dritten Schnittpunktes X''' der g-Geraden mit C_4^3 an.

271. Von besonderer Wichtigkeit im Systeme Σ ist die unendlich weite Gerade $g\infty$ der Trägerebene, indem sie die Asymptotenelemente der Curve C_4^3 bedingt. Dieser Geraden $g\infty$ entspricht, wie Abschnitt IV der Einleitung auseinandersetzt, im Fundamentalnetze $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ der Hauptkreis $\varkappa$ als Bild. In Folge dessen stellen die Punkte $\overline{U}$, welche dem Grundkegelschnitt k und dem Hauptkreise $\varkappa$ ausser dem Hauptpunkte $\overline{O}_1$ gemeinsam sind, die Bilder der Asymptotenpunkte $U\infty$ auf dem Erzeugnisse C_4^3 dar. Weil nur drei $\overline{U}$-Punkte möglich sind, von welchen zwei imaginär sein können, folgern wir logisch höchstens drei reelle oder einen reellen und zwei imaginäre Asymptotenpunkte $U\infty$ einer Curve 3[ter] Ordnung. Ihre Bestimmung unterscheidet sich nicht wesentlich von jener eines gewöhnlichen Curvenpunktes, und es mag vor der Hand nur noch im Auge behalten werden, dass die einen $U\infty$-Punkt hervorbringenden Strahlen in den Hauptpunkten $O_1O_2O_3$ einander gleichlaufen und die Asymptotenrichtung angeben.

Wir können ferner jetzt schon bemerken, dass im

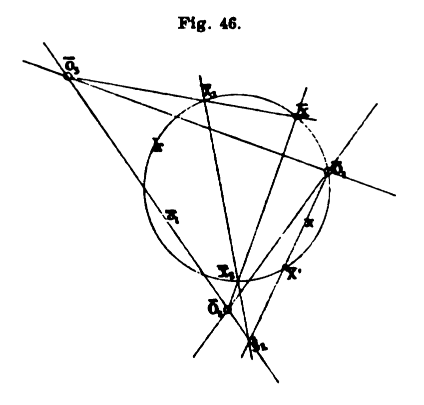
Falle von drei reellen $U\infty$-Elementen, die auch der Ordnungszahl einer C_4^3 entsprechen, zwei oder alle drei Coincidenzen eingehen können, wodurch dann die unendlich weite Gerade eine einfache Tangente oder eine Wendetangente der Curve wird, was immerhin einen speciellen Charakter einer C_4^3 aufdrückt, sowie überhaupt auch die gestaltlichen Verhältnisse einer derartigen Curve beeinflusst. Wir sehen in dieser Beziehung einen nicht unwesentlichen Unterschied von den Curven 4ter Ordnung. Während letztere vollständig im Endlichen verlaufen können, ist dieses bei einer Curve 3ter Ordnung niemals möglich, und es wird demgemäss eine C_4^3 immer wenigstens in einem reellen Punkte von einer beliebigen g-Geraden geschnitten werden müssen.

272. Das Bild von einer Tangente x, welche die Plancurve C_4^3 im Punkte X berührt, ist ein Kegelschnitt $\bar{\xi}$, der als Individuum dem Fundamentalnetze $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ angehört. Dieser Bildkegelschnitt $\bar{\xi}$ berührt den Grundkegelschnitt k einfach im Bilde $\bar{X}$. Kehren wir den Vorgang um, so ist zu sagen: „Das Bild der im $\bar{X}$-Punkte gezogenen Grundkegelschnittstangente $\bar{x}$ ist ein Kegelschnittsindividuum ξ, welches zum Netze $O_1O_2O_3$ zählt, und die Curve C_4^3 in X einfach berührt." Dabei ist die Bezeichnungsweise insofern auseinanderzuhalten, dass die Elemente jedes Paares $x\bar{x}$, $\bar{\xi}\xi$ zu einander in keinem bildlichen Connex der gedachten quadratischen Verwandtschaftsbeziehung stehen.

Von dem Kegelschnitte ξ kennt man die Punkte $O_1O_2O_3X$; bildet man einen beliebigen Punkt $\overline{Y}$ der $\bar{x}$-Tangente nach Y ab, so kann jetzt mittelst der fünf Punktenangaben die x-Tangente durch eine lineare Kegelschnittsconstruction auf bekannte Weise erhalten werden.

Eine andere Tangentenconstruction (Fig. 46.), die ebenfalls linear ist und den Vortheil hat, dass durch sie unmittelbar auch der Tangentialpunkt resultirt, folgt aus (270): „Man projicire den Bildpunkt $\overline{X}$ durch Strahlen der Hauptpunkte $\overline{O}_2\overline{O}_3$ auf den Grundkegelschnitt nach $\overline{X}_2\overline{X}_3$; die Verbindungslinie $|\overline{X}_2\overline{X}_3|$ zeigt auf der Hauptseite $\bar{o}_1 \equiv |\overline{O}_2\overline{O}_3|$ einen Schnittpunkt ξ_1 an. Zieht man den Hauptstrahl $|\overline{O}_1\xi_1|$, so trifft er den Grundkegelschnitt im Bilde $\overline{X}'$ des Tangentialpunktes X' der in X laufenden Curventangente x."

Fig. 46.



Wir werden späterhin Gelegenheit finden, noch einer anderen Tangentenconstruction zu gedenken, von der eine schöne Verwendung gemacht wird.

273. Die nächste Aufgabe (Fig. 44.) betrifft die Tangenten in den Hauptpunkten $O_1O_2O_3$ der Plancurve C_4^3. Im Doppelpunkte O_1 gibt es seiner Eigenschaft gemäss zwei solche Tangenten d_1d_1'. Man findet

sie sehr einfach als die entsprechenden derjenigen Hauptstrahlen, welche den $\bar{O}_1$-Punkt mit den Punkten des Paares $\bar{A}_1\bar{A}_1'$ in (269) verbinden. Um die Tangente d_2 des Hauptpunktes O_2 zu construiren, erinnern wir uns der Eigenschaft (64), dass dieser Punkt das Bild desjenigen ist, der als Schnitt der Hauptlinie $\bar{o}_2 \equiv |\bar{O}_1\bar{O}_3|$ zum andernmale in $\bar{A}_2$ mit dem Grundkegelschnitte eintritt. Fixirt man also $\bar{A}_2$ noch durch den Hauptstrahl aus $\bar{O}_2$, so muss nothwendig der ihm entsprechende in O_2 die gesuchte Tangente d_2 sein. In der Ausführung hat man demzufolge den Schnitt, welchen die zu $|\bar{O}_2\bar{A}_2|$ gleichlaufende, durch $\bar{O}_3$ gehende Gerade auf dem Hauptkreise hervorbringt, mit O_2 zu verbinden; oder: man wird den Schnitt des Strahles $|\bar{O}_2A_2|$ am Hauptkreise mit O_3 verbinden, wodurch die Richtung der d_2-Tangente bestimmt ist.

Noch einfacher fällt die Construction der Tangente d_3 des Hauptpunktes O_3 aus. Der Grundkegelschnitt k wird von der Hauptlinie $\bar{o}_3 \equiv |\bar{O}_1\bar{O}_2|$ in einem Punkte $\bar{A}_3$ nochmals getroffen. Projicirt man $\bar{A}_3$ aus dem Centrum $\bar{O}_3$ auf x, so ist der diesen Proportionspunkt verbindende Strahl des Büschels O_3 direct die gesuchte d_3-Tangente. Die Richtigkeit dessen folgt aus der Eigenthümlichkeit der Hauptpunkte $O_3\bar{O}_3$ als Centra der Perspectivitätslagen, die in (45) ihre Begründung gefunden haben.

Jede der Tangenten d_2d_3 trifft die C_4^3 nochmals in ihrem Tangentialpunkte T_2 resp. T_3. Die Construction dieser letzteren gestaltet sich sehr einfach. Auf dem

Grundkegelschnitte k bilden sich die Tangentialpunkte durch die Strahlen $|\bar{O}_2\bar{A}_2|$, $|\bar{O}_3\bar{A}_3|$ in den Punkten $\bar{T}_2\bar{T}_3$ ab. Die Transformation dieser letzteren nach dem Gesetze der Grundconstruction zeigt die Figur.

An dieser Stelle sei auch des Folgenden erwähnt. Wir haben vorhin darauf hingewiesen, dass die Hauptpunkte O_2O_3 für unser Curvenerzeugniss, im Gegensatze zu dem Doppelpunkt O_1, einfache Elemente bedeuten. Aus diesem Grunde und vermöge der Ordnung der Curve C_4^3 muss die Hauptlinie $|O_2O_3| \equiv o_1$ noch einen dritten Punkt A_I mit der Curve besitzen. Einige Ueberlegung führt zu dem Schlusse, dass das Kegelschnittsbild des A_I-Punktes der Punkt $\bar{O}_1$ selbst sein muss. Wir dürfen jedoch jetzt $\ddot{O}_1$ nicht als Hauptpunkt des Dreiecks $O_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ ansehen, weil ihm dann bekanntlich (35) die sämmtlichen Punktenelemente der homologen Seite o_1 entsprechen würden, und man auf diese Weise zu keiner Lösung kommen könnte. Ist also $\bar{O}_1$ als Punkt des Grundkegelschnitts k betrachtet, so ist der ihn fesselnde Hauptstrahl in $\bar{O}_1$ nichts anderes als die daselbst gehende Tangente $\bar{d}_1$ von k. Wenn somit der Hauptkreisschnitt, welchen die in $\bar{O}_3$ zur Tangente $\bar{d}_1$ gleichlaufende Gerade hervorbringt, durch einen Strahl des Büschels O_1 verbunden wird, so erhält man den fraglichen Punkt A_I auf o_1.

Es ist klar, dass nur die Doppelpunktstangenten d_1d_1' im Tangentensystem der Curve C_4^3 eine singuläre Rolle spielen und dass die Tangentenelemente d_2d_3 als einfache, wie sie in jedem anderen Curvenpunkte

auch vorkommen, anzusehen sind. Die Doppelpunktstangenten sind entweder beide reell oder gleichzeitig imaginär; im ersteren Falle ist der Doppelpunkt O_1 ein Knoten und die Curve bildet in ihm eine Schleife von der Eigenschaft, dass von keinem ihrer Punkte an die Curve in ihrem weiteren Verlaufe Tangenten gezogen werden können; im zweiten Falle ist O_1 ein isolirter Doppelpunkt. Es ist weiter leicht einzusehen, dass eine Doppelpunktstangente ausser dem O_1-Punkte keinen anderen Curvenpunkt enthalten kann, weil sie in O_1 drei Punktenelemente vereinigt, indem ihr Berührpunkt mit ihrem Tangentialpunkt, der auf dem die Schleife durchlaufenden Curvenzuge zu denken ist, liegt und mit O_1 zusammenfällt. Dahingegen werden aus den Punkten $O_2 O_3$ wegen ihrer Einfachheit an die Curve C_4^3 je ein Paar Tangenten v reell oder imaginär, ausser der in ihnen selbst gehenden, ziehen, und sie in V-Punkten berühren, welche wir zwar auch als Verzweigungselemente bezeichnen, insofern solches durch die Beziehung mit dem Grundkegelschnitt k und dem Hauptdreiecke $\overline{O}_1 \overline{O}_2 \overline{O}_3$ gerechtfertigt erscheint, die aber keineswegs jene singulare Rolle spielen, wie die Verzweigungselemente eines Doppelpunktes einer Curve 4[ter] Ordnung in (72).

Die Abbildung der Verzweigungselemente V, v auf dem Grundkegelschnitte k geschieht bekanntlich durch die Tangenten $\bar{v}$ und deren Berührpunkte $\overline{V}$, welche in Bezug der Hauptpunkte $\overline{O}_2 \overline{O}_3$ an diesem möglich sind.

274. In (271) ist angegeben worden, dass eine C_4^3 höchstens drei reelle Asymptotenpunkte $U\infty$, deren Tangenten die Asymptoten u sind, besitzt. Das Bild eines $U\infty$-Punktes ist ein $\overline{U}$-Punkt auf dem Hauptkreise $\varkappa$, der sich mit diesem letzteren und dem Grundkegelschnitte k als ein gemeinschaftliches Element ergibt, und die betreffende Asymptotenrichtung wird insbesondere durch den Hauptstrahl $|O_3\overline{U}|$ direct angezeigt. Die Lage der Asymptote u wird dann fixirt sein, wenn man ihren Tangentialpunkt $\mathfrak{R}$ kennt. Diesen letzteren finden wir aber dadurch, wenn die diesbezügliche Construction in (272) auf den $\overline{U}$-Punkt angewendet wird. Andererseits sind diejenigen Punkte U, welche eine C_4^3 mit einem Kreise $\varkappa$ ausser den Hauptpunkten $O_1O_2O_3$ gemeinsam hat, die abgebildeten Asymptotenpunkte $\overline{U}\infty$ des zugehörigen Grundkegelschnitts k, und da dieser nur zwei, ein oder gar kein $\overline{U}\infty$-Element nachzuweisen vermag, je nachdem er Hyperbel, Parabel oder Ellipse wird, so muss gefolgert werden, dass auch die C_4^3 sich mit dem Hauptkreise $\varkappa$ nur noch in zwei, einem oder keinem reellen U-Elemente verschneidet. Dieses Resultat ist in Uebereinstimmung mit (10), wornach eine Curve 3ter Ordnung mit einem Kegelschnitte nicht mehr als $3 \cdot 2 = 6$ Punkte gemeinschaftlich hat; davon werden vier durch die Hauptpunkte $O_1O_2O_3$ absorbirt, so dass also noch die zwei U-Punkte restiren.

Aus der angestellten Betrachtung ist demnach auch insbesondere hervorgehend, dass in dem Falle,

wo der Grundkegelschnitt k von der unendlich weiten Geraden $g\infty$ der Trägerebene $\Sigma\overline{\Sigma}$ in einem $\overline{U}\infty$-Punkte berührt wird, dieser Kegelschnitt also eine Parabel ist, es nur einen einzigen U-Punkt gibt, der aber ein Coincidenzelement bildet, weshalb dann die Curve C_4^3 von dem bezüglichen Hauptkreise in diesem Coincidenzpunkte einfach berührt wird.

275. Denkt man sich durch den Doppelpunkt O_1 und durch den Hauptpunkt O_2 ein Kreisbüschel, so lassen sich dessen Individuen als Hauptkreise einer fortlaufenden Reihe quadratischer Verwandtschaften zwischen der constant gedachten Curve C_4^3 und den dabei variabel werdenden Grundkegelschnitten auffassen, wobei der O_3-Punkt offenbar die Curve C_4^3 durchläuft. Jeder Hauptkreis, ein Individuum des Kreisbüschels, trifft die unveränderliche C_4^3 in einem Punktenpaare UU', das auch imaginär ausfallen kann, und die Gesammtheit dieser Paare formirt auf der Plancurve eine quadratische Punkteninvolution, die nicht central ist.

Verbindet man die conjugirten UU'-Elemente durch Gerade mit O_1, so entsteht im Doppelpunkte eine Strahleninvolution; deren Doppelstrahlen sind leicht zu finden und treffen die Curve C_4^3 in den Doppelpunkten DD' der Punkteninvolution. Durch die Tripel O_1O_2D, O_1O_2D' ist jedesmal ein Kreis bestimmt, welcher als Individuum dem Kreisbüschel zuzählt und die Plancurve in dem bezüglichen D-Punkte

einfach berührt. Jedem der zwei bezeichneten Kreise entspricht aber in dem durch ihn hervorgerufenen Verwandtschaftsfalle ein Grundkegelschnitt, der nach obigem Resonnement eine Parabel ist. Der Inhalt vorstehender Untersuchung fasst sich in folgender Form: „Durch den Doppelpunkt und einen beliebigen andern Punkt einer Plancurve 3ter Ordnung lassen sich nur zwei Kreise annehmen, welche die Curve in einem Punkte einfach berühren und in einem andern Punkte nochmals schneiden.“

§ 4. Classification und die absolute quadratische Involution der Curve.

276. Es wurde die Classe einer Plancurve 3ter Ordnung mit Doppelpunkt entsprechend der Formel (8) durch die Zahl 4 angegeben. Der synthetische Nachweis dieser Behauptung ist folgender. Man denke sich im Systeme $\overline{\Sigma}$ des Grundkegelschnitts k einen beliebigen Punkt $\overline{M}$. Dieser bildet mit den Hauptpunkten $\overline{O}_1\overline{O}_2\overline{O}_3$ die Basispunkte eines Kegelschnittsbüschels, das wir ebenfalls mit $\overline{M}$ bezeichnen wollen. Jedes Individuum dieses Büschels schneidet den Grundkegelschnitt k, der a priori den Basispunkt $\overline{O}_1$ enthält, noch in drei Punkten, von welchen ein Paar imaginär sein können. In dem Büschel $\overline{M}$ kommen aber nur vier Individuen vor, die mit dem Grundkegelschnitte eine im Allgemeinen einfache Berührung haben, ihn also, ausser in $\overline{O}_1$, höchstens noch in

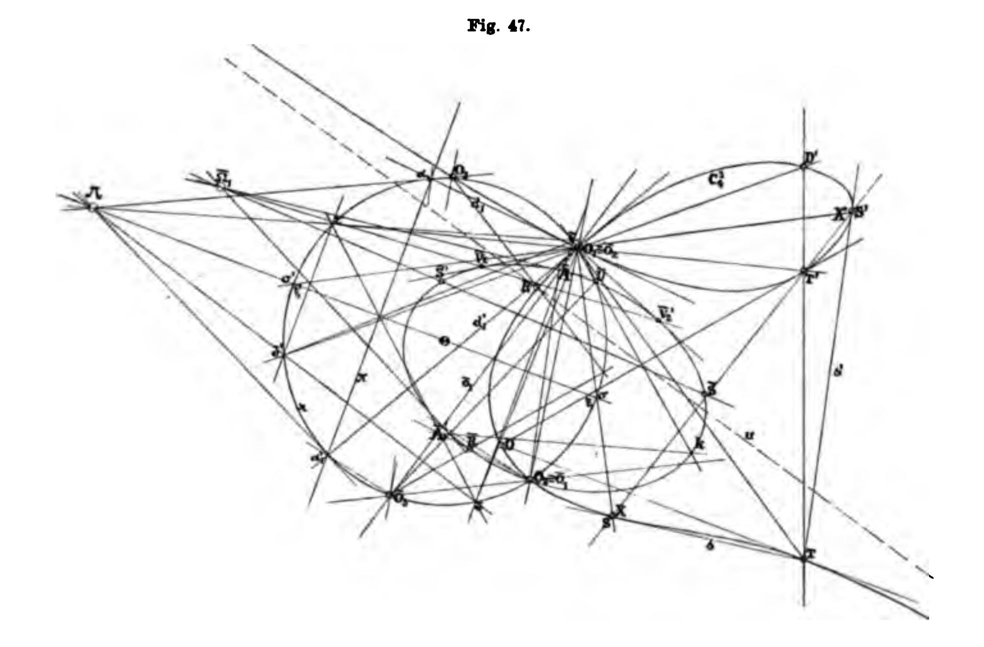
einem, aber immer reellen Punkte schneiden. Uebertragen wir nun die Sache in das System Σ der Plancurve C_4^3, so wird das Kegelschnittsbüschel $\overline{M}$ durch ein Strahlenbüschel M repräsentirt, dessen Centrum M das Bild von $\overline{M}$ und dessen Elemente die Bilder der einzelnen Individuen des Kegelschnittsbüschels $\overline{M}$ sind. Diese bildliche Transformirung zeigt uns, dass die einzelnen Strahlenelemente des M-Büschels die Curve C_4^3 in je einem Punktentripel treffen, welche Tripel auf der Curve analog wie in (92) eine cubische Involution ausmachen. Die Doppelelemente dieser Involution sind durch die Berührpunkte der vier Tangenten, die als Bilder der vier vorhin bemerkten, den Grundkegelschnitt k einfach berührenden Kegelschnitte des Büschels $\overline{M}$ erscheinen, vertreten. Das Facit der angestellten Untersuchung, dass man von einem beliebigen ausserhalb der Curve 3ter Ordnung mit Doppelpunkt liegenden M-Punkte nur vier Tangenten an sie ziehen kann, bestätigt die Classenzahl der Curve.

277. Wird der M-Punkt als Curvenpunkt angenommen, so kann man aus ihm nur mehr zwei Tangenten ziehen, indem die in ihm selbst gehende als eine Coincidenz von zwei Tangenten aufzufassen ist, wie einige Ueberlegung einsehen lässt. Der variable M-Punkt der Curve ist diesfalls gemeinsamer Tangentialpunkt der zwei aus ihm laufenden Curventangenten, deren Berührpunkte XX' ein

Paar conjugirte Elemente einer auf der Plancurve C_4^3 absoluten quadratischen, nicht centralen Involution sind, in welcher die Nachbarelemente des Doppelpunktes O_1 die Doppelelemente vorstellen (90). Die Verbindungslinien der conjugirten Elemente der bezeichneten absoluten Punkteninvolution sind Elemente eines Tangentenbüschels zweiter Ordnung, dessen Enveloppe der absolute Involutionskegelschnitt der Curve C_4^3 zu nennen ist.

Werden (Fig. 47.) die Punkte XX' der vorbezeichneten Involution durch Strahlen mit dem

Fig. 47.



Doppelpunkte verbunden, so entsteht eine quadratische Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die Doppel-

punktstangenten $d_1 d_1'$ sind. Diese Strahleninvolution kann man perspectivisch auf dem Hauptkreise $\varkappa$ abbilden, so dass also zwei conjugirte Strahlen zwei conjugirte Kreispunkte $\xi\xi'$ ausschneiden. Weil eine quadratische Involution auf einem Kegelschnitte central ist, so besitzt auch die Punkteninvolution des Hauptkreises $\varkappa$ ein Centrum Π, dessen Polare π ihn in jenem Punktenpaare $\alpha_1 \alpha_1'$ durchsetzt, das durch die Doppelpunktstangenten $d_1 d_1'$ hervorgeht. Selbstverständlich trifft die π-Polare als Involutionsaxe den Hauptkreis in reellen, imaginären oder coincidirenden α_1-Punkten, je nachdem die Π-Involution hyperbolisch, elliptisch oder parabolisch ist, was wieder damit zusammenhängt, ob die d_1-Strahlen ein reelles oder ein imaginäres Paar oder eine zusammenfallende Tangente der Plancurve 3ter Ordnung bilden, wodurch aber bekanntlich die Eigenschaft von O_1 als Knoten, Einsiedler oder Rückkehrpunkt bedingt wird.

278. Wurde die absolute quadratische Punkteninvolution des vorigen Artikels perspectivisch auf dem Hauptkreise abgebildet, so kann ein ähnlicher Vorgang, jedoch im quadratischen Verwandtschaftssinne, auf dem Grundkegelschnitt ausgeführt werden. Es ist klar, dass diesfalls das Punktenpaar $\bar{A}_1 \bar{A}_1'$ die Doppelelemente, also die Hauptlinie $\bar{o}_1$ die Involutionsaxe und ihr Pol $\bar{\Omega}_1$ in Bezug des Grundkegelschnitts k das Centrum der übertragenen Involution sind. (Vergl. Art. 90.)



Will man demnach für einen beliebigen X-Punkt den conjugirten X' der absoluten Involution der Plancurve C_4^3 ermitteln, so kann man solches vortheilhaft mit Hilfe einer der bezeichneten Involutionsgebilde $\Pi\overline{\Omega}_1$ ausführen, indem der entsprechend conjugirte Punkt ξ' resp. $\overline{X}'$ am Hauptkreise $\varkappa$ resp. auf dem Grundkegelschnitte k aufgesucht und unseren vorgehenden Erklärungen gemäss auf die Curve C_4^3 nach X' durch Projection, resp. durch Transformation, übertragen wird.

279. Zunächst sei an die bekannte Eigenschaft der conjugirten Axen einer quadratischen Strahleninvolution erinnert. Weil solche in jeder Involution von Strahlen vorhanden sind, so kommen sie auch in den (277) definirten vor, und wir erhalten im Doppelpunkte O_1 zwei Axenstrahlen, welche die Plancurve C_4^3 in den Scheiteln SS' treffen. In der Π-Involution erhält man die perspectivisch entsprechenden Bilder $\sigma\sigma'$ des Scheitelpaares SS' als Schnittpunkte des Hauptkreisdurchmessers, der durch das Centrum Π gezogen wird, mit dem Hauptkreise $\varkappa$ selbst. Liegt die Plancurve nicht gezeichnet vor, so brauchen wir nur die den Axenstrahlen $|O_1\sigma|$, $|O_1\sigma'|$ homolog entsprechenden des Hauptpunktes $\overline{O}_1$ mit dem Grundkegelschnitte in den Bildern $\overline{S}\overline{S}'$ zu schneiden. Die weitere Construction der Curvenscheitel SS' unterliegt keiner Schwierigkeit. Die Tangenten ss', welche in den Scheiteln SS' an die

Curve C_4^3 gezogen werden können, sind ihre Scheiteltangenten, und diese müssen, vermöge der Eigenschaft des Scheitelpaares als conjugirte Elemente der absoluten Involution, einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt T auf der Curve haben.

280. Jedem Paare conjugirter Punkte XX' der absoluten quadratischen Involution einer C_4^3, folgerichtig auch dem Scheitelpaare SS', gehört nach oben ein gemeinschaftlicher Tangentialpunkt T an. Man findet ihn leicht mittelst einer der in (272) erklärten Tangentenconstructionen, sobald auch nur einer der XX'-Punkte angegeben ist. Die Verbindungslinie $|XX'|$ resp. $|SS'|$ enthält, wegen der Ordnungszahl der Curve, noch einen dritten Curvenpunkt T', der Begleiter des Paares XX' resp. SS' genannt sei. Es gibt eine einfache Construction des Begleiters T' bei Angabe des Paares XX' und seines gemeinschaftlichen Tangentialpunktes T, oder wechselweise dieses letzteren selbst bei Angabe des geraden Tripels $XX'T'$ resp. $SS'T'$, welche aus dem folgenden Zusammenhange klar sein dürfte.

Sucht man mittelst des Strahles $|O_1T|$ in der Π-Involution den mit T perspectivischen Punkt τ und weiter den zu letzterem conjugirten τ', indem die Gerade $|\tau\tau'|$ ein Strahl des Centrums Π ist, so folgt der Schnitt:

$$(|O_1\tau'|, \ |XX'|) \equiv T'.$$

Aus der Eigenschaft des Punktenpaares $\tau\tau'$ in der

Involution Π ist unmittelbar die Rolle der Punkte TT' als abermals conjugirte Elemente in der absoluten Involution der Curve abzulesen. Dieses im Zusammenhang mit dem Obigen lässt erkennen, dass dem Paare TT' gleichfalls ein Begleiter D' beigesellt sein muss, dessen Construction sich jetzt noch einfacher gestaltet: „Den XX'-Elementen sind in der Π-Involution $\xi\xi'$-Elemente perspectivisch; von dem Pole der durch Π ziehenden Geraden $|\xi\xi'|$ laufen zwei Strahlen nach den Punkten $\tau\tau'$; der erstere zeigt auf dem Hauptkreise das Perspectivbild δ des Tangentialpunktes D, der letztere das Bild δ' des begleitenden Tripelpunktes D' beidemale von dem Paare TT' an.“ Endlich ist ohne weitere Beweisführung das Stattfinden der folgenden Harmonitäten auf dem Hauptkreise $\varkappa$:

$$(\xi\xi',\ \tau'\delta') = -1;\ \ (\xi\xi',\ \tau\delta) = -1;\ \text{etc.}$$

und in Folge der perspectivischen Beziehung auch auf der Plancurve C_4^3:

$$(XX',\ T'D') = -1;\ \ (XX',\ TD) = -1;\ \text{etc.}$$

einzusehen. Man kann die Ergebnisse der voranstehenden Untersuchungen in folgenden Satz zusammenfassen:

„Wenn in einem geraden Tripel $XX'T'$ einer Plancurve C_4^3 ein Paar conjugirte Elemente der absoluten quadratischen Punkteninvolution vorkommen, so bildet ihr Begleiter T' mit ihrem Tangentialpunkte T wieder ein Paar



conjugirter Elemente dieser Involution und es ist der Begleiter D' des Paares TT' der dem Begleiter T'' harmonisch zugeordnete Punkt des Paares XX' etc."

Von dem soeben ausgesprochenen Satze werden wir Gelegenheit finden, in der Folge eine fruchtbringende Anwendung zu machen.

281. Liegen die drei Schnittpunkte $XX'X''$ einer beliebigen Geraden g der Ebene und einer Curve C_4^3 nicht in der im vorigen Artikel vorausgesetzten Beziehung, dass zwei davon conjugirte Elemente der absoluten Involution sind, so werden auch die in jenen Punkten gezogenen Tangenten die Curve in drei separirten Tangentialpunkten $TT'T''$ treffen. Während also im vorigen Artikel das conjugirte Punktenpaar XX' den gemeinsamen Tangentialpunkt T und der Begleiter T' dieses Paares den Tangentialpunkt D hervorrief, so dass die Verbindungsgerade $|TD|$ die in T laufende Curventangente, demnach D deren Tangentialpunkt war, finden wir jetzt für das gerade Tripel $XX'X''$ zwar keinen gemeinsamen Tangentialpunkt, welcher wie dort mit demjenigen des Begleiters au feiner Geraden liegt, aber denn doch die letztere Eigenschaft insofern erhalten, als das Tripel $TT'T''$ ebenfalls auf einer und derselben Geraden t: der „Satellite", sich situirt. In Folge dieser wichtigen Eigenschaft leitet sich unmittelbar und von selbst der Satz ab;

„Die Tangentialpunkte der Asymptoten einer unicursalen Plancurve 3ter Ordnung liegen auf einer Geraden.“

§ 5. Aufgaben über die Vervollständigung einer C_4^3.

282. Mit Berufung auf die Auseinandersetzungen, die in (267) gepflogen wurden, wollen wir in den folgenden Aufgaben einige Fälle besprechen, welche die Vervollständigung einer durch Angabebedingungen bestimmter Curve C_4^3 behandeln.

Aufgabe: „Eine C_4^3 ist durch ihren Doppelpunkt O_1 und durch sechs andere einfache Punkte $O_2 O_3 BCDE$ gegeben.“

Den O_1-Punkt und zwei beliebige $O_2 O_3$ der gegebenen Punkte wählen wir als Ecken des Hauptdreiecks, dem wir den Hauptkreis $\varkappa$ umschreiben. Die zu $|O_1 O_2|$ parallele durch O_3 laufende Gerade zeigt auf $\varkappa$ das Centrum $\overline{O}_3$ an. Nach der Fundamental-Construction (268) werden die Bildpunkte $\overline{B}\overline{C}\overline{D}\overline{E}$ ermittelt, welche im Vereine mit $O_2 (\equiv \overline{O}_1)$ fünf Bestimmungsstücke des Grundkegelschnitts k ergeben, womit der punktenweisen Vervollständigung der C_4^3 nach derselben Construction (268) nichts mehr im Wege steht. Auch die Tangenten beliebiger Curvenpunkte zu construiren, unterliegt nach den Artikeln (272, 273) keiner Schwierigkeit.

283. Aufgabe: „Von einer C_4^3 sind bekannt: der Doppelpunkt O_1 mit seinen Tangenten $d_1 d_1'$ und zwei beliebige Punkte $O_2 O_3$ mit ihren Tangenten $d_2 d_3$.“

Die Punkte $O_1 O_2 O_3$ bilden das Hauptdreieck, über welches analog der vorigen Aufgabe der Hauptkreis $\varkappa$ umschrieben und das $\bar{O}_3$-Centrum fixirt wird. Indem die Beziehungen in (273) zur Wiederholung kommen, suche man die den gegebenen Doppelpunktstangenten $d_1 d_1'$ entsprechenden Hauptstrahlen des $O_2(\equiv \bar{O}_1)$-Punktes in Umkehrung der Construction (268); diese zeigen auf der Hauptlinie $\bar{o}_1 \equiv |O_1 \ddot{O}_3|$ die Bilder $\bar{A}_1 \bar{A}_1'$ der Nachbarelemente des Doppelpunktes O_1 an. In Ausführung dessen ist zu bemerken, dass die entsprechenden Hauptstrahlen des Paares $d_1 d_1'$ als Verbindungslinien des O_2-Punktes mit jenen Hauptkreisschnitten gefunden werden, die man vermittelst der zu den $d_1 d_1'$-Tangenten gleichlaufenden Strahlen des O_3-Centrums erreicht. Analog werden die Bildpunkte $\bar{A}_2 A_3$ auf den Hauptlinien $\bar{o}_2 \bar{o}_3$ mit den gegebenen Tangenten $d_2 d_3$ erhalten.

Da a priori der O_2-Punkt dem Grundkegelschnitt eigenthümlich ist, so wird dieser letztere durch die fünf Punktenelemente $O_2 \bar{A}_1 \bar{A}_1' \bar{A}_2 \bar{A}_3$ genügend bestimmt, womit die weitere Vervollständigung der C_4^3-Curve in Punkten und Tangenten ausgesprochen ist.

284. Obgleich in (272) mehrere Tangentenconstructionen besprochen sind, so möge noch eine solche hier Platz finden, welche die seither erfolgten Betrachtungen zulassen. Wir denken uns, die Plancurve C_4^3 sei wie in Aufgabe (282) angegeben und die punktenweise Vervollständigung der Curve bereits er-

ledigt. Es handelt sich darum, in einem beliebigen Punkte die Tangente linear aufzufinden. Ist dieser Punkt einer der Hauptpunkte $O_1 O_2 O_3$, so wissen wir aus (273), wie sich die Construction gestaltet, wenn der Grundkegelschnitt k bereits gezeichnet vorliegt. Allein, wir brauchen diese letztere Annahme gar nicht vorauszusetzen, denn es wird für eine lineare Construction vollkommen genügen, wenn der Grundkegelschnitt durch fünf Elemente angegeben erscheint, wie ja eigentlich auch dort ausgegangen ist, weil man dann immer mit Hilfe des Pascal'schen Satzes eine lineare Kegelschnittsconstruction durchzuführen in der Lage ist. Von diesem Gesichtspunkte betrachtet, gestaltet sich jetzt die Sache nachstehend.

Ist X ein Curvenpunkt, dessen Tangente x gesucht wird, so legen wir durch ihn und den Doppelpunkt O_1 einen beliebigen Kreis $\varkappa'$; dieser wird die Curve noch in höchstens drei Punkten treffen, von welchen wir Einen im Vereine mit dem Doppelpunkt O_1 und dem X-Punkte als ein Hauptdreieck $O_1 O_2 O_3$ derart wählen, dass der X-Punkt mit dem Hauptpunkte O_3 identisch ist. Dieses setzt freilich voraus, dass man die Schnittpunkte des $\varkappa'$-Kreises mit der Curve C_4^3 kennt, was im Allgemeinen nicht angenommen werden darf. Um diesem Uebelstande von vorn herein zu begegnen, wird man einfach den $\varkappa'$-Kreis durch einen bei der Vervollständigung der Curvenpunkte schon bekannten Punkt O_2 und durch die Punkte O_1, $O_3 \equiv X$ legen. Wir sehen jetzt $\varkappa'$ als einen Hauptkreis, wie

in (268) an, fixiren von vier beliebigen Curvenpunkten, die durch Vervollständigung früher erhalten worden sind, die Bilder der neuen Verwandtschaftsbeziehung, so bestimmen diese vier Punktenbilder zusammen mit dem O_2-Punkte einen Grundkegelschnitt k'. Nun berufen wir uns auf die Construction der d_3-Tangente in (273). Zu ihrer Auffindung bedarf es der analogen Bestimmung des dort bezeichneten $\bar{A}_3$-Punktes, d. i. der Schnitt, welchen die Hauptlinie $|O_1 O_2|$ der neuen Beziehung mit dem Kegelschnitt k' ausmacht. Dieser Schnittpunkt $\bar{A}_3$ wird wie gesagt auf bekannte Weise nach dem Pascal'schen Satze linear erhalten. Der Strahl $|\bar{O}_3 \bar{A}_3|$ erzeugt auf dem $\varkappa'$-Kreise einen Schnittpunkt, dessen geradlinige Verbindung mit dem Punkte $O_3 \equiv X$ die verlangte Curventangente $d_3 \equiv x$ ist.

Zweiter Abschnitt.

Die absoluten ein-zweideutigen Elementensysteme.

§ 6. Definitionen.

285. Die Gesammtheit der Tangenten auf einer Plancurve C_4^3 formirt ein System, in welchem jedes Element einen Berührungspunkt X und einen Tangentialpunkt T besitzt. Das Tangentensystem begreift demnach zwei Punktensysteme in sich, die absolut auf der Curve vorhanden sind. Nun ist aber aus (277) in Erinnerung, dass von jedem Curvenpunkte T immer zwei Tangenten an die Curve ziehen, deren Berühr-

punkte XX' conjugirte Elemente der absoluten quadratischen Punkteninvolution bilden. Daraus ist zu entnehmen, dass einem Elemente der Curvenpunkte T jedesmal zwei Elemente der Involution XX' entsprechen, dass aber andererseits einem X-Elemente immer nur ein einziges T-Element zukommt, was eine Ein-Zweideutigkeit aussagt und folgenden Satz berechtigt: „Auf einer ebenen C_4^3 sind die einzelnen Curvenpunkte und ihre conjugirten Punktenpaare der absoluten quadratischen Involution, für welche sie gemeinschaftliche Tangentialpunkte bilden, zwei ein-zweideutige Punktensysteme."

§ 7. Uebertragung auf den Grundkegelschnitt. Directionscurven. Inflexionen.

286. Die Beziehungen, welche in dem genannten ein-zweideutigen absoluten Elementensysteme stattfinden, werden wir durch seine Abbildung auf dem Grundkegelschnitte viel unmittelbarer bemerken können. In diesem Sinne denken wir uns diese beiden Systeme übertragen, so dass jedem $\overline{T}$-Punkte des Grundkegelschnitts k ein Paar $\overline{X}\overline{X}'$-Punkte des letztern ein-zweideutig zugewiesen sind. Wir wissen aus (278), dass die quadratische Involution der $\overline{X}\overline{X}'$-Punkte das Centrum $\overline{\Omega}_1$, d. i. der Pol der Hauptlinie $\bar{o}_1$, besitzt. Hat man somit einen $\overline{X}$-Punkt angenommen, so erhält man sofort seinen conjugirten $\overline{X}'$ mittelst des durch ihn und das $\overline{\Omega}_1$-Centrum laufenden Strahles. Will man den entsprechenden gemeinschaftlichen

$\overline{T}$-Punkt im eindeutigen Systeme finden, so verwenden wir die diesbezügliche Construction in (272), welche den Tangentialpunkt anzeigt.

Betrachten wir zunächst die beiden ein-zweideutigen Punktensysteme $\overline{T}$, $\overline{X}\overline{X}'$ wie in (119) als Scheine zweier Strahlenbüschel $\overline{S}\overline{S}_1$, von welchen der Einfachheit halber das Centrum $\overline{S}_1$ des zweideutigen Büschels identisch mit dem Hauptpunkte $\overline{O}_1$ ($\equiv O_2$), dasjenige des eindeutigen Büschels aber als der sonst beliebige S-Punkt des Grundkegelschnitts k gedacht wird. Das Erzeugniss dieser beiden Strahlenbüschel $S\overline{S}_1$ ist nach (31) eine Curve 3ter Ordnung vom Symbole S_4^3, welche $\overline{S}_1 \equiv \overline{O}_1$ als Doppelpunkt, $\overline{S}$ als einfaches Punktenelement enthält.

In (121) wurde eine derart erzeugte Curve S_4^3 als „Sekantencurve“ bezeichnet. Sie kann mit dem Grundkegelschnitt k nicht mehr, als $3 \cdot 2 = 6$ Punkte gemein haben; von diesen verschlingt ihr Doppelpunkt O_1 ($\equiv O_2$) zwei und das Centrum $\overline{S}$ einen Punkt; es bleiben also noch drei gemeinsame Schnittpunkte $\overline{J}_1\overline{J}_2\overline{J}_3$ übrig.

Um über die Natur der $\overline{J}$-Punkte Klarheit zu schaffen, vergegenwärtigen wir uns die Beziehung der betrachteten ein-zweideutigen Elementensysteme, wornach man ohne Schwierigkeit bemerken wird, dass ein $\overline{J}$-Punkt nichts anderes, als eine Coincidenz eines $\overline{X}$-Elementes mit seinem $\overline{T}$-Punkte ausdrückt. Weil nun a priori ein $\overline{X}$-Punkt, als Berührpunkt einer Curventangente, selbst eine Coincidenz von zwei Curvenpunkten ausmacht, so sieht man drei

Punktenelemente der Curve C_4^3 in jedem $\bar{J}$-Punkte auf dem Grundkegelschnitt abgebildet, was nach (120) eine Inflexion feststellt. Die letztere Eigenschaft bestätigt auch die Formel (7), nach welcher: $i = 3 \cdot 3 (3 - 2) - 6 = 3$ ist, also eine unicursale Curve 3ter Ordnung nicht mehr als drei Inflexionselemente reell besitzen kann. Die Untersuchung resultirt demgemäss: „Das Schnittpunktentripel $\bar{J}_1\bar{J}_2\bar{J}_3$ zeigt die Bilder der auf C_4^3 höchstenfalls zu dreien reell vorkommenden Inflexionspunkte J."

Es ist noch anzumerken, dass von dem Tripel J-Punkte auch ein Paar imaginär sein kann, die Curve C_4^3 also nur einen reellen Inflexionspunkt hat. Dieser Fall wird immer eintreten, sobald der Doppelpunkt O_1 ein Knoten ist. Wenn O_1 ein isolirter Doppelpunkt ist, besitzt die Curve stets drei reelle J-Punkte.

287. „Das J-Punktentripel einer C_4^3 liegt auf einer Geraden g_i." Wir wissen aus (87), dass die Tangente i eines Inflexionspunktes J drei Punktenelemente zur Coincidenz bringt, und somit keinen weiteren Curvenpunkt enthalten kann. Im Fundamentalnetze des Grundkegelschnitts k ist das Bild einer Inflexionstangente i ein Kegelschnittsindividuum ι, welches k in dem Bildpunkte $\bar{J}$ von J osculirt und in jedem Falle im Hauptpunkte $\bar{O}_1$ schneidet. Bringt man demnach zwei J-Punkte auf dem Grundkegelschnitte in Verbindung mit der Construction in (270),

so wird man den dritten $\bar{J}$-Punkt derart erhalten, dass das J-Punktentripel auf einem Kegelschnitte liegt, welcher zu dem Fundamentalnetze $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ als Individuum zählt, und dessen Bild auf der Curve C_4^3 die Gerade g_i ist. Weil eine Wendetangente in ihrem Berührungspunkt den Tangentialpunkt vereinigt, bemerken wir schliesslich im Zusammenhalte mit (281), dass „die g_i ihre eigene Satellite ist".

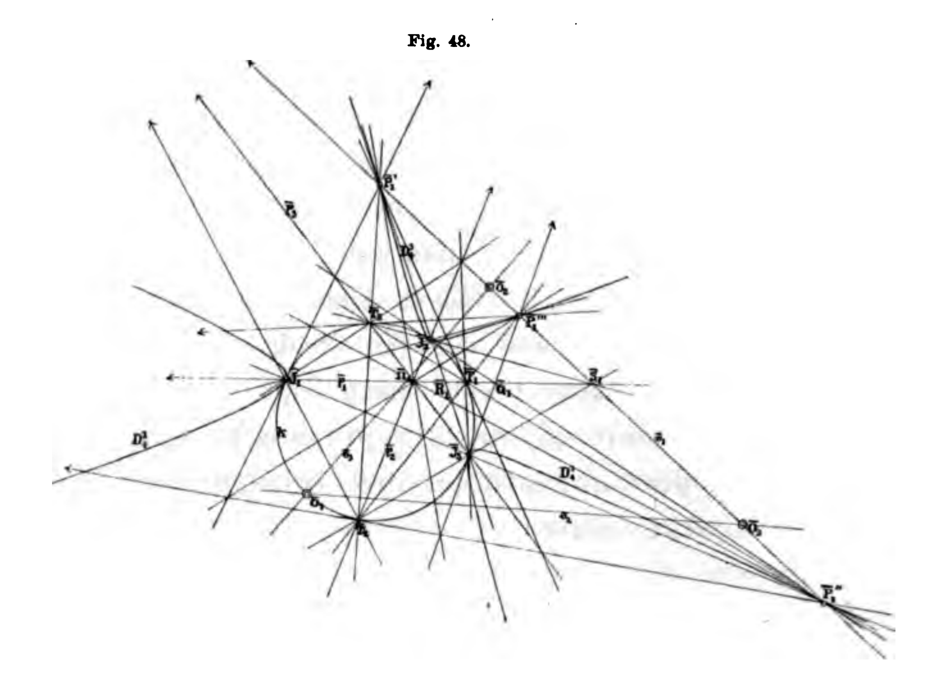
288. Setzt man die zwei auf dem Grundkegelschnitt k conlocalen Punktensysteme $\bar{T}_1\bar{X}\bar{X}'$ nach der Methode in (22) im reciprokalen Sinne zusammen, so dass jeder $\bar{T}$-Punkt des eindeutigen Systems mit den ihm entsprechenden Punkten $\bar{X}\bar{X}'$ des zweideutigen Systems durch Strahlen verbunden erscheint, dann ist die diesbezügliche Directionscurve eine Enveloppe D_3^4 mit drei Spitzen und einer Doppeltangente, welche vermöge ihrer Classenzahl mit dem Grundkegelschnitte $3 \cdot 2 = 6$ gemeinschaftliche Tangenten haben kann, die jedoch in drei Coincidenzpaare zerfallen, so dass k ein die Curve D_3^4 dreimal berührender Kegelschnitt ist. Die drei gemeinschaftlichen Berührungspunkte $\bar{J}_1\bar{J}_2\bar{J}_3$ sind die abgebildeten Inflexionspunkte J der ursprünglichen Plancurve C_4^3. Im Gegensatze zu der in (286) bezeichneten Sekantencurve S_4^3, kann man nach (126) die jetzt gefundene D_4^3 eine Berührungscurve nennen. Es lässt sich noch nachstehende Eigenschaft angeben: „Die drei Spitzentangenten p der Directionscurve D_3^4 treffen sich gemeinschaftlich im

$\bar{\Omega}_1$-Pole der Hauptlinie $\bar{o}_1$ bezugs des Grundkegelschnitts k, und jede von ihnen schneidet diesen letzteren in einem $\bar{J}$-Punkte."

Obige Behauptung, dass D_3^4 ausschliesslich Berührungscurve sei, gilt nur für den Fall, wo alle drei Rückkehrpunkte derselben, also auch die drei J-Punkte reell sind und bekanntlich ihre Doppeltangente eine ideelle ist. Wenn aber die Doppeltangente eine eigentliche wird, die, wie man sich leicht überzeugt, niemand anderer als die Hauptlinie $\bar{o}_1 \equiv | \bar{O}_2\bar{O}_3 |$ ist, so durchsetzt die D_3^4 den Grundkegelschnitt in dem Punktenpaare $\bar{A}_1\bar{A}_1'$ (269), dessen Elemente zugleich die Berührpunkte der Doppeltangente $\bar{o}_1$ sind. Selbstverständlich werden bei dieser Lage von D_3^4 zwei $\bar{J}$-Punkte imaginär und nur ein einziger $\bar{J}$-Punkt bleibt reell. Unsere Untersuchung gipfelt in dem Satze: „Die Seite $\bar{o}_1$ des Hauptdreiecks $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ ist die Doppeltangente der Directionscurve D_3^4; sie ist eine eigentliche oder uneigentliche, wenn sie den Grundkegelschnitt k in reellen oder imaginären $\bar{A}_1\bar{A}_1'$-Punkten schneidet. Im ersteren Falle, wo der Doppelpunkt O_1 der Plancurve C_4^3 ein Knoten ist, hat sie nur einen reellen Berührungspunkt J; im letzteren Falle, wo O_1 ein isolirter Punkt von C_4^3 ist, besitzt sie drei reelle $\bar{J}$-Punkte." Durch diesen Satz ist gleichzeitig die am Schlusse des Artikels (286) aufgestellte Behauptung, die sich auf die Realität der Inflexionen einer C_4^3 bezog, nachgewiesen.

289. Die polar-reciproke Curve der Directionscurve D_3^4 des vorigen Artikels ist eine solche vom Symbole D_4^3. Um sie zu erhalten, brauchen wir offenbar nur die beiden auf dem Grundkegelschnitte k abgebildeten ein-zweideutigen Punktensysteme perspectivisch in ebensolche Tangentensysteme umzuwandeln und sodann (Fig. 48.) die einzelnen Tangenten

Fig. 48.



des Grundkegelschnitts, als Elemente des eindeutigen Systems, mit dem jedesmal entsprechenden Tangentenpaare des zweideutigen Systems (wie in (22)) in Punkten zu schneiden, deren geometrischer Ort die verlangte polare Directionscurve D_4^3 sein wird.

Durch diese Polarisation einer D_3^4 in eine D_4^3 erfährt man unmittelbar, dass (23) der Pol $\bar{\Omega}_1$ der Haupt-

seite $\bar{o}_1$ der Doppelpunkt der Directionscurve D_4^3 sein muss, und dass gleichzeitig die in den Punkten $\bar{A}_1\bar{A}_1'$ laufenden Grundkegelschnittstangenten die Doppelpunktstangenten von D_4^3 sind. Es ist weiter sofort ersichtlich, ob $\bar{\Omega}_1$ ein Knoten oder ein Einsiedler ist, je nachdem er ausser- oder innerhalb von k liegt. Die D_4^3 kann ferner ihrer Erzeugung nach nur eine Berührungscurve sein (24) und der Grundkegelschnitt berührt sie in den J-Punkten, die höchstenfalls ein reelles Tripel bilden, und die conform den früheren Resultaten die Bilder der auf der Grundcurve C_4^3 vorkommenden Inflexionspunkte J vorstellen.

§ 8. Linearbeziehung der abgebildeten Inflexionselemente. Der Involutionskegelschnitt.

290. Die beiden zuletzt betrachteten ein-zweideutigen Tangentensysteme des Grundkegelschnitts k werden (Fig. 48.) von der Haupseite $\bar{o}_1$ perspectivisch in zwei ein-zweideutigen Punktenreihen geschnitten. Diese besitzen bekanntlich nach (21) drei Doppelelemente $\bar{P}_1'\bar{P}_1''\bar{P}_1'''$ und es zeigt eine kurze Ueberlegung, dass diese $\bar{P}_1$-Elemente der Directionscurve D_4^3 incident sein müssen. Denn man braucht nur die Construction der punktenweisen Erzeugung der letzteren zu verfolgen, um einzusehen, dass sich in einem $\bar{J}$-Punkte zwei entsprechende Tangentenelemente decken, dass also auch der Pol $\bar{P}_1$ eines Strahles $\bar{p}_1$ der $\bar{\Omega}_1$-Involution mit der betreffenden $\bar{J}$-Punkttangente in einem $\bar{P}_1$-Punkte der Geraden $\bar{o}_1$ zusammenfallen

welcher letztere ein Element von D_4^3 ist. Wir haben also das Gesetz: „Die Hauptdreiecksseite $\bar{o}_1$ wird von der Directionscurve D_4^3 in drei $\bar{P}_1$-Punkten durchsetzt, deren $\bar{p}_1$-Polaren bezüglich des Grundkegelschnitts k, diesen in $\bar{J}$-Punkten einerseits, und andererseits in dem, einem solchen J-Punkte conjugirten Elemente der Involution $\bar{\Omega}_1$ treffen.“ Ferner ist auch noch auf nachstehenden figuralen Zusammenhang aufmerksam zu machen, der aus unserer Betrachtung hervorgeht: „Die Verbindungslinien von je zweien der drei $\bar{J}$-Punkte schneiden sich in je einem $\bar{P}_1$-Punkte auf $\bar{o}_1$.“

291. Vorstehende Resultate, welche mit einer D_4^3-Curve erzielt wurden, kann man schliesslich auch auf eine einfache Kegelschnittsaufgabe reduciren. Zu diesem Zwecke denken wir uns die D_4^3 durch neun Elemente, von welchen drei in dem Doppelpunkte $\bar{\Omega}_1$ vorhanden sind, nach der vorigen Construction gegeben. Wir verbinden durch diese Angabe mit einem Grundkegelschnitte eine quadratische Verwandtschaft, wie solches in Artikel (282) gezeigt wurde. Hierauf gelangt die in (270) ausgeführte Construction für die Ermittlung der drei P_1-Punkte auf der $\bar{o}_1$-Sekante zur Anwendung. Auf solche Weise kommt man also auch ohne eigentliche Construction der Curve D_4^3 zur Kenntniss der Inflexionspunkte J einer Plancurve C_4^3.

292. Die Betrachtung der absoluten ein-zweideutigen Elementensysteme auf einer unicursalen Curve

3[ter] Ordnung zur Bestimmung ihrer Inflexionspunkte ist von nicht zu unterschätzendem wissenschaftlichen Werthe insbesondere deshalb, weil uns der Zusammenhang zwischen einer Directionscurve dieser Systeme und dem Grundkegelschnitte, auf welchem die Curve abgebildet wird, über die wesentlichen Beziehungen und das Vorkommen der Inflexionselemente überhaupt auf synthetischem Wege reichliche Belehrung und Aufschlüsse zu geben vermag. Wenn man jedoch den Standpunkt der constructiven Vereinfachung voranstellen will, kann man rascher das Ziel in folgender Weise erreichen.

In (277) haben wir ausschliesslich die absolute quadratische Involution einer C_4^3 kennen gelernt, welche späterhin, als das zweideutige Elementensystem, mit den einzelnen Curvenelementen in Zusammenhang gebracht worden ist. Verweilen wir nochmals bei dieser Involution. Wir haben gesehen, dass die Verbindungslinien der conjugirten, auf dem Grundkegelschnitte abgebildeten Punktenpaare die Strahleninvolution vom Centrum $\overline{\Omega}_1$ ergeben. Einen Strahl dieser letzteren Involution kann man immerhin in Beziehung bringen mit einem Strahle, der das Bild des bezüglichen Tangentialpunktes mit irgend einem Punkte $\overline{S}$ des Kegelschnitts k verbindet. Auf diese Art entstehen zwei projectivische Strahlenbüschel $\overline{\Omega}_1\overline{S}$, deren Erzeugniss ein Kegelschnitt ist, den man ebenfalls einen „Involutionskegelschnitt" nennen kann. Er muss vor allem die zwei Büschelmittelpunkte $\overline{\Omega}_1\overline{S}$ enthalten, so dass noch drei mit dem Grundkegel-

schnitte gemeinschaftliche Punkte $\bar{J}$ erübrigen, welche aber nichts anderes als die bisher genannten Bildpunkte der Inflexionen auf der Grundcurve C_4^3 bezeichnen.

293. Die merkwürdige Linearbeziehung der $\bar{J}$-punkte, welcher wir oben gedachten, und die (Fig. 48.) sich nochmals auch in der Form aussprechen lässt, dass man sagt: „Die $\bar{J}$-Punkte bilden ein Dreieck, dessen Seiten sich mit den in seinen Ecken gehenden Grundkegelschnittstangenten paarweise in den drei $\bar{P}_1$-Punkten auf der Hauptseite $\bar{o}_1$ treffen", gestattet, dass bei Bekanntgabe eines $\bar{J}$-Punktes die beiden übrigen durch eine lineare Construction gefunden werden. Ist z. B. der Punkt $\bar{J}_1$ bekannt, so trifft seine Grundkegelschnittstangente die $\bar{o}_1$-Linie in dem $\bar{P}_1'$-Punkte; die Polare $\bar{p}_1$ des letztern schneidet die $\bar{o}_1$ in einem Punkte $\bar{S}_1$ und den Grundkegelschnitt in dem Punkte $\bar{T}_1$. Der auf $\bar{p}_1$ liegende Pol $\bar{\Omega}_1$ bildet mit dem Punktenpaare $\bar{S}_1\bar{T}_1$ ein Tripel einer Harmonität, in welcher ein vierter Punkt $\bar{Q}_1$ zu $\bar{\Omega}_1$ conjugirt ist, also die Relation besteht:

$$(\bar{S}_1\bar{T}_1,\ \bar{\Omega}_1\bar{Q}_1) = -1.$$

Die Polare von $\bar{Q}_1$ in Bezug des Grundkegelschnitts schneidet diesen in den zwei gesuchten Punkten $\bar{J}_2\bar{J}_3$, indem sie selbstverständlich durch den $\bar{P}_1'$-Punkt zieht. Die Richtigkeit dieser Constructionsanleitung ergibt sich aus den harmonischen Beziehungen des Dreiecks $\bar{J}_1\bar{J}_2\bar{J}_3$ und des Poles $\bar{\Omega}_1$ zur Hauptdreiecksseite $\bar{o}_1$.

294. Bisher ist von den in den Inflexionspunkten J einer Curve C_4^3 laufenden Inflexionstangenten i nicht gesprochen worden, was nun nachgeholt werden soll. Die Definition einer Inflexions- oder Wendetangente begreift für eine solche die Coincidenz eines Punktentripels der Curve, so dass eine i-Tangente ausser ihrem J-Berührpunkt keinen anderen Curvenpunkt enthält, wie auch aus der Ordnungszahl einer C_4^3 klar wird. Dieser letztere Fall kommt zwar scheinbar auch bei einer Doppelpunktstangente vor; allein dort hat man zu bedenken, dass sich (70) der betreffende Berührpunkt mit seinem Tangentialpunkt deckt, indem jeder auf dem, den andern Curvenzug im Doppelpunkte durchsetzenden Zweige der Curve liegt, also keine eigentliche Punktencoincidenz zu drei Elementen, wie bei einem Inflexionspunkte, vorkommt. Im Fundamentalnetze $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ entspricht einer i-Tangente ein Kegelschnitt ι, welcher in dem Bildpunkte $\bar{J}$ den Grundkegelschnitt k osculirt und allerdings auch in $\bar{O}_1$ schneidet; da aber $\bar{O}_1$ ein Basispunkt des Netzes ist, so kann i nur den einzigen J-Punkt mit der Plancurve gemein haben. Die Bestimmung einer i-Tangente ist durch Anwendung der im Art. (272) zuerst erklärten Tangentenconstruction als erledigt zu betrachten, weshalb wir uns weiter damit nicht befassen werden.

Es wäre nur noch die Frage zu beantworten, ob die Doppelpunktstangenten $d_1 d_1'$ einer C_4^3 gleichzeitig Wendetangenten sein können? Dass die Tangenten $d_2 d_3$

in den Hauptpunkten $O_2 O_3$, welche ja für die Curve als einfache Elemente gelten, durch Wendetangenten vertreten werden können, ist an und für sich klar, und es wird dieses immer dann der Fall sein, sobald einer oder beide der in (273) bezeichneten Punkte $\bar{A}_2 \bar{A}_3$ die Berührpunkte von aus den homologen Hauptpunkten $\bar{O}_2 \ddot{O}_3$ an den Grundkegelschnitt k gezogenen Tangenten sind. Die letztere Eigenschaft kann für das Nachbarpunktenpaar $\bar{A}_1 \bar{A}_1'$ und den dem Doppelpunkte O_1 homologen Hauptpunkt $\bar{O}_1$, wie man ohne Schwierigkeit erkennt, niemals eintreten, weil eben $\bar{O}_1$ selbst ein Punkt des Grundkegelschnitts ist, und demnach keine, als die in ihm laufende Tangente, möglich ist. Obige Frage beantwortet sich aus diesem Grunde verneinend.

§ 9. **Krümmungsverhältnisse und harmonische Beziehungen.**

295. Das in (275) betrachtete Kreisbüschel ist nur ein specieller Fall der folgenden Aufgabe. Ist eine Curve C_4^3 gegeben, so kann man ihren Doppelpunkt und zwei beliebige andere ihrer Punkte als das Hauptdreieck $O_1 O_2 O_3$ ihres ebenen Systems annehmen. Es lässt sich nun ein Kegelschnittsbüschel bestimmen, welches den Doppelpunkt und einen willkürlich in der Ebene, jedoch nicht auf der Curve befindlichen Punkt M als einfache Basispunkte, den Hauptpunkt O_2 aber als einen Coincidenzbasispunkt besitzt, so dass alle Individuen des Büschels die Curve C_4^3 in O_2 einfach berühren müssen. Ein Büschelindividuum wird

demnach, weil es in den Punkten $O_1 O_2$ je zwei Curvenelemente vereinigt enthält, die Curve noch in zwei Punkten XX' treffen. Die Paare XX' formiren auf der Curve C_4^3 eine nicht centrale quadratische Involution von Punkten, die man als Strahleninvolution aus dem Doppelpunkte O_1 projiciren kann. Die Gerade $|O_2 M|$ trifft die Curve unmittelbar in einem XX'-Paare; ein zweites Paar ist gebildet durch den Tangentialpunkt T der Curventangente von O_2 und jenem Curvenschnitte, welchen der Strahl $|O_1 M|$ hervorbringt. Durch diese beiden conjugirten Elementenpaare XX' ist die quadratische Involution ausreichend bestimmt, deren Doppelpunkte man am besten in der Abbildung auf dem der Beziehung nach unseren Ableitungen zukommenden Grundkegelschnitte k ermitteln kann, wo die Involution central ist.

Fällt ein X-Punkt mit O_2 zusammen, so folgt, dass das betreffende Kegelschnittsindividuum die Curve C_4^3 in O_2 osculirt und somit ihre Krümmung in diesem Punkte anzeigt, was immer eintreten wird, sobald der M-Punkt als Schnitt der Geraden $|O_1 M|$ mit einer der zwei Tangenten, für welche O_2 gemeinschaftlicher Tangentialpunkt ist, angenommen wird. Die Berührpunkte dieser letzteren Tangenten sind Elemente der absoluten Curveninvolution (277) und von den XX'-Punkten der gegenwärtigen Betrachtung wohl zu unterscheiden. Denken wir uns eine dieser Tangenten, welche die Curve in einem Punkte Y berührt und in besagter Weise den

M-Punkt trägt, so handelt es sich also zunächst darum, den zu O_2 conjugirten Punkt X der XX'-Involution zu fixiren. Wir können dieses, wie bemerkt wurde, entweder am Grundkegelschnitt in der auf ihm abgebildeten Involution thun, oder aber auch direct auf folgende Weise. Man findet in beiden Fällen durch eine einfache geometrische Ueberlegung die Punkte TY als Doppelelemente der XX'-Involution; in der mit der letzteren perspectivisch verbundenen Strahleninvolution O_1 ergibt sich aber die Harmonität:

$$(|O_1T|, |O_1Y|; \quad |O_1O_2|, |O_1X|) = -1,$$

woraus der X-Punkt resultirt. Die in O_2 laufende Curventangente sowie die Punkte O_1O_2XM bestimmen den in O_2 die C_4^3 osculirenden Kegelschnitt. Man sieht, dass zwei solcher Kegelschnitte, welche das Krümmungsmaass der Curve in O_2 identisch angeben, möglich sind.

296. Wenn nach dem Vorgange in (277) ein Inflexionspunkt J einer C_4^3 als Centrum einer quadratischen Involution angenommen wird, so ist klar, dass ein Doppelpunkt der letzteren in dieses Involutionscentrum J hineinfällt, und dass der andere Doppelpunkt T Berührpunkt der noch aus J an die Curve laufenden Tangente ist. Der Involution als Strahlengebilde entspricht im Systeme des Grundkegelschnitts k ein Kegelschnittsbüschel, dessen Basispunkte die Hauptpunkte $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ und das Bild $\bar{J}$ sind. Jedes Individuum

dieses Büschels enthält somit ausser dem Hauptpunkte $\bar{O}_1$ noch den Punkt $\bar{J}$ und ein Paar Punkte $\bar{X}\bar{X}'$ als conjugirte Elemente der auf k abgebildeten quadratischen Involution, deren Centrum offenbar ein Punkt $\bar{P}$ der in $\bar{J}$ an den Grundkegelschnitt gezogenen Tangente ist, von welchem die zweite Tangente das Bild T des Doppelpunktes $\bar{T}$ anzeigt. Der $\bar{P}$-Punkt liegt aber nach (290) auf der Hauptlinie $\bar{o}_1$.

Zieht man aus $\bar{P}$ einen beliebigen Strahl $\bar{x}$, so trifft derselbe den Grundkegelschnitt k in einem Paare $\bar{X}\bar{X}'$-Punkten. Die Curvenbilder XX' liegen auf einem Strahle x der J-Involution, der aber nicht etwa bildlich im quadratischen Sinne aufzufassen ist. Die Situation zeigt, dass auf dem Grundkegelschnitt die Gerade $|\bar{J}\bar{T}|$ Polare des $\bar{P}$-Punktes ist und folglich durch diese beiden letzteren Elemente das $\bar{X}\bar{X}'$-Paar harmonisch geschieden wird. Die bildliche Uebertragung dieser Thatsache spricht der Satz aus: „Zieht man aus einem Inflexionspunkt J einer C_4^3 einen beliebigen Strahl x, so trifft er die Curve C_4^3 in einem Paare XX'-Punkte, welche durch den J-Punkt und die Verbindungslinie $|O_1T|$ harmonisch getrennt sind.“

297. Vorstehender Satz erfährt sofort von selbst eine Specialisirung, wenn man zwei Inflexionspunkte der Curve C_4^3 durch eine Gerade x verbindet, in folgender Form: „Jede Verbindungslinie $|O_1T|$, welche einem der drei Inflexionspunkte zu-

geordnet ist, wird von ihm harmonisch geschieden durch die beiden anderen Inflexionspunkte."

Verbindet man einen Inflexionspunkt J durch einen Doppelpunktsstrahl $|O_1 J|$, so geht dieser selbst durch den Schnittpunkt der Wendetangenten der zwei anderen J-Punkte. Man erhält also jetzt schon in diesem Schnittpunkte drei Strahlen. Dem Strahle $|O_1 J|$ kommt ein Strahl $|O_1 T|$ zu, welcher die x-Gerade in einem Punkte trifft, den wir ebenfalls mit dem Wendetangentenschnitt durch eine Gerade verbinden; diese Gerade ist von der Geraden $|O_1 J|$ durch die beiden bezeichneten Wendetangenten harmonisch getrennt, was aus dem vorhin ausgesprochenen Satze unmittelbar hervorgeht.

Dritter Abschnitt.

Die Curven dritter Classe.

§ 10. Ableitung und Grundbeziehungen.

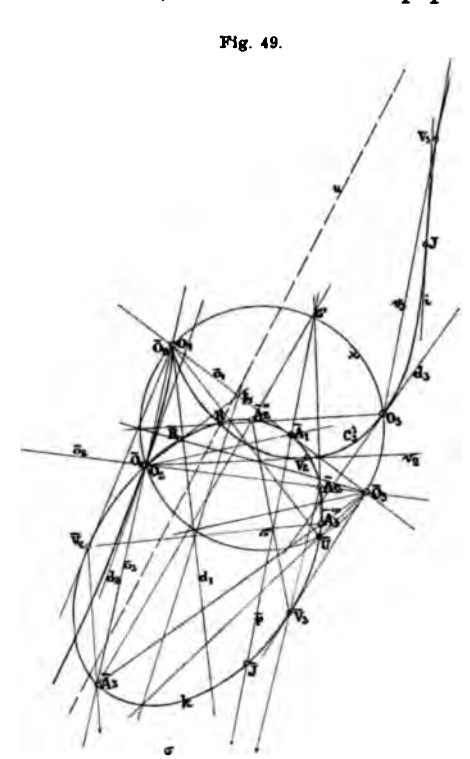
298. Die Curven 3ter Ordnung und Classe können als Specialfälle derjenigen Reciprokalcurven vom Symbole: C_3^4 oder C_4^3 betrachtet werden, wenn bei den ersteren die Ordnung, bei den letzteren die Classe um eine Einheit degenerirt und also das aus Beiden abgeleitete Symbol: C_3^3 entsteht. Bei dieser Umwandlung oder Degeneration verschwindet von der Gattung C_3^4 auch die Doppeltangente und von der

Gattung C_4^3 der Doppelpunkt und die abgeleitete C_3^3 behält eine Spitze. Es ist begreiflich, dass eine Plancurve C_3^3 viele Eigenschaften ihrer Stammverwandten in der dadurch bedingten Modifikation ausdrücken wird, die allerdings mitunter eine völlig neue Gestalt annehmen werden, in welcher ursprüngliche Merkmale oftmals ganz verschwinden, meistentheils jedoch in wesentlich vereinfachter Form zu Tage treten.

Das Studium einer C_3^3 und ihrer charakteristischen Eigenschaften wird erheblich erleichtert, wenn wir die Curve durch eine transformativische Abbildung mit einem Kegelschnitt in Zusammenhang bringen, wie das in früheren Fällen mit Nutzen geschehen ist. Bei einer derartigen Abbildung werden wir uns in der Methode zunächst jenem Verfahren anschliessen, das in (267) allgemein für eine Curve 3[ter] Ordnung verwendet wurde. Weil eine C_3^3 unicursal ist und in ihrer Spitze als Singularität einen Rückkehrpunkt ausdrückt, so muss nach unseren aprioristischen Voraussetzungen bei der Einrichtung einer quadratischen Verwandtschaft (Fig. 49.) der Hauptkreis $\varkappa$ diesen Rückkehrpunkt enthalten. Bezeichnet man den Rückkehrpunkt mit O_1, so werden mindestens noch zwei Punkte $O_2 O_3$ der Curve C_3^3 dem Hauptkreise $\varkappa$ angehören müssen, welche drei Punkte das Hauptdreieck derselben bilden. Es entsteht somit die Frage, wie viele Punktenelemente weiter zur vollständigen Bestimmung der C_3^3 noch erforderlich sind?

Die Beantwortung der gestellten Frage wird durch die Fixirung des Grundkegelschnitts k geschehen. Wir wissen, dass das Hauptdreieck des letzteren bestimmt ist, sobald der Hauptpunkt $\bar{O}_3$ nach (268) auf

Fig. 49.



$\varkappa$ construirt ist, und dass dann der Grundkegelschnitt, wie bei jeder Curve 3ter Ordnung, dem $\bar{O}_1 \equiv O_2$-Punkte angehört. Wir erinnern uns ferner an die Bedingung in (269), wornach das Nachbarpunktenpaar $\bar{A}_1 \bar{A}_1'$ auf $\bar{o}_1$ wegen des Singularpunktes O_1 gegenwärtig den Uebergangsfall eines Coincidenzpunktes $\bar{A}_1$ vorstellt, so dass die Hauptlinie $\bar{o}_1$ naturgemäss für den Grundkegelschnitt k ein Tangentenelement wird. Wir kennen also bis jetzt schon zwei Bestimmungselemente dieses Kegelschnitts: den $\bar{O}_1$-Punkt und die Tangente $\bar{o}_1$, weshalb zu schliessen ist, dass noch drei Elemente der C_3^3 bekannt sein müssen, um durch ihre Abbildung den Grundkegelschnitt k als bestimmt anzunehmen. Eine Zusammenzählung resultirt also für die Angabe einer C_3^3 (inbegriffen des Rückkehr-

punktes O_1) sechs Elemente; da aber eine Curve 3ter Ordnung zu ihrer Bestimmung neun Elemente bedarf, so muss geschlossen werden, dass der Singularpunkt O_1 vier Bedingungen ausdrückt, welche Eigenschaft durch die Position des Grundkegelschnitts zur $\bar{o}_1$-Geraden begründet ist.

§ 11. Specieller Charakter der absoluten Elementensysteme.

299. Die Erklärungen im vorigen Artikel erlauben uns die weitere Vervollständigung der Curve C_3^3 nach den Constructionsanleitungen, welche bei den Curven 4ter Classe gezeigt wurden, ohne wesentliche Abweichungen. In Betreff der Construction der Spitzentangente d_1 ist zu bemerken, dass diese nichts anderes ist, als der entsprechende Hauptstrahl von $|\bar{O}_1\bar{A}_1|$. Man wird demgemäss den Hauptkreisschnittpunkt, welcher mittelst der durch $\bar{O}_3$ zu $|\bar{O}_1\bar{A}_1|$ Parallelen entsteht, mit O_1 verbinden; diese Verbindungslinie ist die Spitzentangente d_1 der Curve. Da die Hauptpunkte O_2O_3 einfache Punkte der Curve sind, so gehören ihnen auch nur die einfachen Tangenten d_2d_3 an, welche ganz gleich wie in (273) mit Hilfe der dort bezeichneten Punkte $\bar{A}_2\bar{A}_3$ gefunden werden. Ebenso verhält es sich, wie gesagt, mit der punktenweisen Vervollständigung der Curve C_3^3, welche nach dem Constructionsgesetze in (268) auszuführen kommt, wobei ordnungsgemäss die Gerade $g\infty$ höchstens drei reelle Punkte, also die Curve ebenso viele Asymptotenelemente enthalten kann. Anders ge-

staltet sich hauptsächlich die Beziehung der absoluten Elementensysteme auf einer C_3^3, was damit bedingt wird, dass die Curve um eine Classeneinheit vermindert ist. „Man kann nämlich, im Gegensatze zu einer C_4^3, von einem beliebigen Punkte der Curve C_3^3 nur mehr eine einzige Tangente an sie ziehen, sofern diejenige in ihm selbst ausseracht gelassen wird.“ Dadurch entstehen auf der C_3^3 zwei Punktensysteme, welche aus den einzelnen Punkten und ihren Tangentialpunkten gebildet werden, die absolut vorhanden und einander projectivisch sind.

300. Ein Grundkegelschnitt k, welcher eine Curve C_3^3 abbildet, wird auch die im vorigen Artikel gedachten absoluten Elementensysteme enthalten. Diese Abblidung von jedem Curvenpunkte X und seinem Tangentialpunkte X' werden wir nach der Construction in (272) bewerkstelligen, wodurch auf dem Grundkegelschnitte die projectivischen Systeme $\overline{X}\overline{X}'$ conlocal hervorgerufen werden. An Stelle des Punktensystems $\overline{X}\overline{X}'$ können wir immerhin auch das Tangentensystem $\overline{x}x'$ des Grundkegelschnitts substituiren: „Die Directionscurve der für sich projectivischen Elementensysteme $\overline{X}\overline{X}'$, $\overline{x}\overline{x}'$ ist jedesmal ein Kegelschnitt D^2, welcher den Grundkegelschnitt k doppelt berührt. Die gemeinschaftlichen Berührpunkte sind identisch einerseits der auf $\overline{o}_1$ befindliche Punkt $\overline{A}_1$,

andererseits ein J-Punkt." Hieraus muss geschlossen werden, dass eine C_3^3 nur einen einzigen Punkt J und die in ihm gehende Tangente i als Inflexionselemente besitzt. Der $\bar{A}_1$-Punkt ist nach oben das Coincidenzbild des Spitzenpunktes O_1 und vereinigt das Punktenpaar $\bar{A}_1\bar{A}_1'$, demnach auch ein Paar Inflexionspunkte der Curve C_3^3 in seiner Abbildung, aus welchem Grunde nur noch ein einziger eigentlicher Inflexionspunkt für die Plancurve C_3^3 erübrigt. Somit der Satz: „Eine ebene C_3^3 hat nur einen Inflexionspunkt und die ihm angehörige Inflexionstangente."

§ 12. Linearconstructionen des Inflexionselementes. Harmonische Beziehungen.

301. Die Berührungssehne $|\bar{A}_1\bar{J}| \equiv \bar{p}$, von welcher (Fig. 49.) im vorigen Artikel die Rede war, ist sehr einfach zu finden, wenn wir folgende Beziehungen festhalten. Die Polare des Hauptpunktes $\bar{O}_2 \equiv O_1$ geht durch den $\bar{A}_1$-Punkt und trifft den Grundkegelschnitt k nochmals in einem Punkte $\bar{V}_2$; analog ergibt sich ein Punkt $\bar{V}_3$ bezüglich des Hauptpunktes $\bar{O}_3$. Es ist aus früheren Betrachtungen bekannt, dass die Punkte $\bar{V}_2\bar{V}_3$ Bilder zweier Curvenpunkte V_2V_3 sind, in denen je eine Tangente v_2v_3 zieht, deren Tangentialpunkte offenbar durch die homologen Hauptpunkte O_2O_3, welche für die Plancurve C_3^3 allerdings nur einfache Punkte bezeichnen, repräsentirt sind. Man kann die Punkte V_2V_3 deshalb nicht als Verzweigungs-

elemente definiren, weil ihre Tangentialpunkte $O_2 O_3$ keine Doppelpunkte der Curve sind, was schon a. a. O. (273) bemerkt worden ist.

Neben dem Paare $\overline{V}_2 \overline{V}_3$ erinnern wir uns des in (273) bemerkten Punktenpaares $\bar{A}_2 \bar{A}_3$, welches den Schnitt der Hauptseiten $\bar{o}_2$, $\bar{o}_3 \equiv o_3$ mit dem Grundkegelschnitte vorstellt. Projiciren wir die letzteren aus den Hauptpunkten $\bar{O}_2 \equiv O_1$, $\bar{O}_3$ auf den Grundkegelschnitt, so bekommen wir die Punkte $\bar{A}_2'' \bar{A}_3'''$. Es können nun folgende Constructionen ausgeführt werden:

$$(|\overline{V}_2 \bar{A}_3|, \; |\overline{V}_3 \bar{A}_2|) \equiv \sigma,$$
$$(|\overline{V}_2 \bar{A}_3'''|, \; |\overline{V}_3 \bar{A}_2''|) \equiv \sigma',$$
$$(|\bar{A}_2 \bar{A}_3'''|, \; |\bar{A}_3 \bar{A}_2''|) \equiv \sigma''.$$

Jeder der drei erhaltenen σ-Punkte bestimmt mit dem $\bar{A}_1$-Punkte die Berührungssehne $\bar{p}$, auf welcher der $\bar{J}$-Punkt liegt. Liegt der Grundkegelschnitt k gezeichnet vor, oder ist derselbe durch eine immer leicht angebbare Zahl Bestimmungsstücke vorausgesetzt: „jedes Mal erfolgt die Construction des Inflexionspunktes J als Bild des Grundkegelschnittspunktes $\bar{J}$ linear.“

Eine gleichfalls lineare Construction der in J laufenden Wendetangente i zeigt der Artikel (272).

302. Der Pol der Berührungssehne $\bar{p} \equiv |\bar{A}_1 \bar{J}|$ ist ein Punkt $\ddot{P}$ auf der Hauptlinie $\bar{o}_1$. Erinnern wir uns der Eigenschaften, die in (295) für eine C_4^3 er-

örtert worden sind, so identificirt sich jetzt der $\bar{A}_1$-Punkt mit dem dort bezeichneten Berührpunkt $\bar{T}$. Man hat $\bar{P}$ wiederum als das Centrum einer auf dem Grundkegelschnitt k vorkommenden Involution anzusehen, deren Doppelelemente die Punkte $\bar{J}\bar{T}$ sind. Die Transformirung dieser Involution in das System der Curve C_3^3 gibt daselbst eine centrale Involution 2ten Grades im Inflexionspunkte J, deren Doppelpunkte JO_1 sind, was ja auch ganz natürlich ist, da man ausser der in J gehenden Inflexionstangente keine zweite eigentliche Tangente an die Curve ziehen kann und man annehmen muss, dass die zweite Tangente durch die Verbindungslinie $|JO_1|$ vertreten ist. Wegen der Punktenidentität $T \equiv A_1$ im Rückkehrpunkte O_1 ist offenbar die Spitzentangente d_1 die Polare des Inflexionspunktes J und wir können in Folge dessen die bezüglichen Sätze in (295) und (296) nachstehend formuliren:

Ein x-Strahl der Involution im Inflexionspunkte J trifft die Curve C_3^3 in zwei Punkten XX', welche durch J und die Spitzentangente harmonisch getrennt werden.“ Und weiter die Harmonität:

$$(|O_1J|,\ d_1;\ |O_1X|,\ |O_1X'|) = -1.$$

Aus diesen harmonischen Beziehungen ist abzuleiten: „Die Curventangenten in zwei XX'-Punkten der J-Involution schneiden sich gemeinschaftlich auf der Spitzentangente d_1.“

Vierter Abschnitt.

Die dreimal berührenden Kegelschnitte einer C_4^3.

§ 13. Erklärung der zu Grunde liegenden Bedingungen. Abbildungsgesetz.

303. Wir gehen (Fig. 50.) von folgenden Annahmen aus. In der Ebene liegen ein beliebiger Kegelschnitt k und zwei beliebige Punkte $O_1 S$; ausserdem sind zwei Gerade $o_1 s$ gegeben, von denen die erstere eine Tangente mit dem Berührpunkte Ω_1, die letztere eine Sekante des Kegelschnitts k ist, welche mit o_1 einen Punkt O_2 gemein hat. Sofern die getroffenen Annahmen in Bezug der gegenseitigen Lage ganz willkürliche sind, sollen sie jedoch nachstehenden Bedingungen unterworfen sein:

a) Die Geraden $o_1 s$ sind Träger von zwei perspectivischen Punktensystemen $\xi \sigma$, deren Centrum in S liegt.

b) Der Punkt O_1 ist das Centrum eines Strahlenbüschels, welches mit der Punktenreihe σ auf dem Träger s perspectivisch ist;

c) das Tangentensystem $\bar{x}$ des Kegelschnitts k ist perspectivisch dem Punktensysteme ξ auf o_1.

Die Perspectivität der charakterisirten Elementensysteme, in welchen involutorische Eigenschaften ausgeschlossen sein sollen, umfasst nothwendig eine projectivische Beziehung zwischen dem Strahlenbüschel O_1 und dem Tangentensysteme des zu Grunde gelegten Kegelschnittes k, deren geo-

metrischer Ort eine Curve 3ter Ordnung ist, die in O_1 einen Doppelpunkt hat. Die Punktenconstruction dieser Ortscurve gestaltet sich folgend:

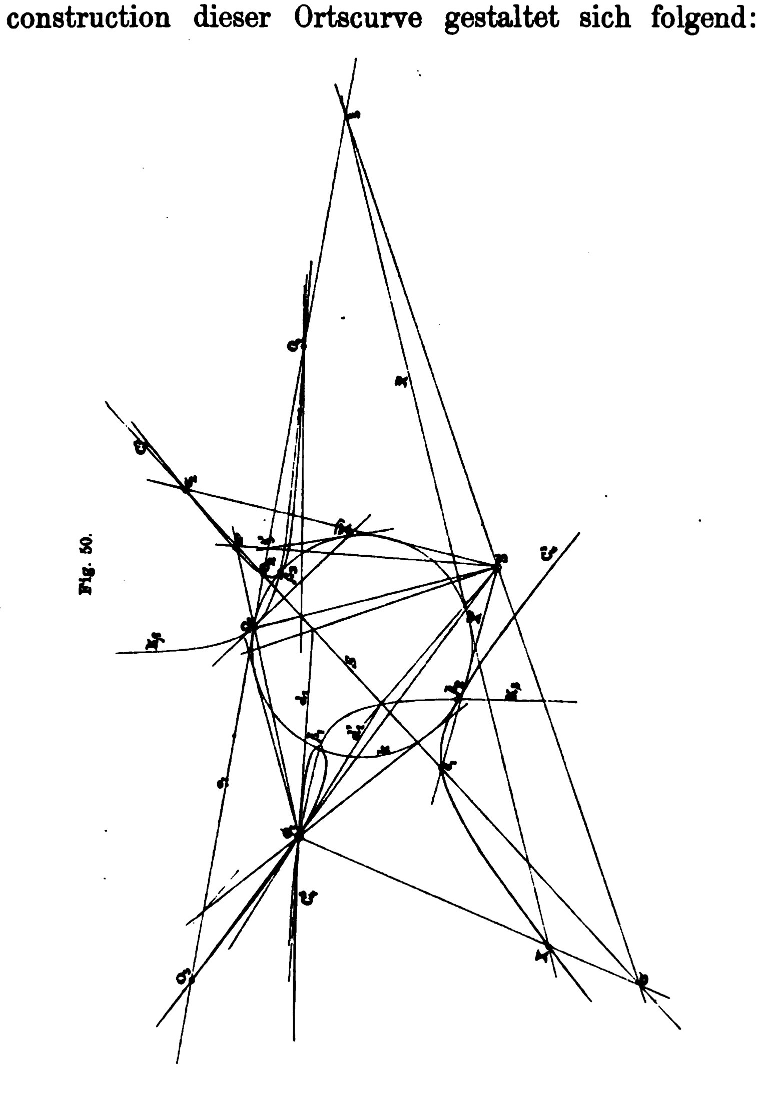


Fig. 50.

Jeder Strahl des S-Centrums trifft den o_1-Träger in einem ξ-Punkte und den s-Träger in einem σ-Punkte der bezeichneten Reihen. Die Verbindungslinie $|O_1\sigma|$,

als Element des Büschels O_1, schneidet die in ξ laufende Grundkegelschnittstangente $\bar{x}$, als Element des vorausgesetzten Tangentensystems, in einem Punkte X der Erzeugnisscurve 3ter Ordnung."

Die erwähnte $\bar{x}$-Tangente berührt den Grundkegelschnitt k in einem Punkte $\bar{X}$. Die Punkte $X\bar{X}$ stehen vermittelst der x-Tangente zu einander in derartiger Beziehung, dass man sagen kann: „Das X-Punktensystem des Curvenerzeugnisses erscheint durch das $\bar{X}$-Punktensystem auf dem Grundkegelschnitte abgebildet."

304. Den synthetischen Nachweis, dass O_1 Doppelpunkt der Erzeugnisscurve 3ter Ordnung ist, zeigt folgende Betrachtung. Aus O_1 kann man im Allgemeinen zwei Tangenten an den Grundkegelschnitt k ziehen; sieht man eine solche als Element des erzeugenden $\bar{x}$-Tangentensystems an, so folgt O_1 naturgemäss durch Anwendung der Grundconstruction eines Curvenpunktes in (303) als Doppelpunkt. Dieses Resultat berechtigt die symbolische Bezeichnung der Erzeugcurve: C_4^3. Gleichzeitig ist wahrzunehmen, dass die den beiden $\bar{x}$-Tangenten des Doppelpunktes O_1 entsprechenden O_1-Strahlen des erzeugenden Büschels die Doppelpunktstangenten $d_1 d_1'$ sind; man erhält sie sehr einfach, indem der ξ-Punkt einer solchen x-Tangente mit dem Centrum S verbunden wird, wodurch auf dem s-Träger ein σ-Element hervorgerufen wird, das incident der betreffenden d_1-Tangente angehört.

305. Die Ordnung der Curve C_4^3 bedingt a priori je ein Punktentripel auf den zugrundeliegenden Geraden $o_1 s$. Vor Allem gehört hierher der Schnittpunkt $(o_1 s) = O_2$, als ein diesen perspectivischen Punktenreihen gemeinsames Element. Ein zweiter Punkt O_3 folgt aus dem Schnitte der o_1-Geraden mit der Verbindungslinie $|SO_1|$, sofern der Umstand bedacht wird, dass in der $|SO_1|$ eine Coincidenz von zwei Strahlen der Büschel SO_1 statthat. Ein dritter Punkt O_4 auf o_1 ergibt sich, wenn man den Strahl $|S\Omega_1|$ mit der s-Geraden in einem σ-Punkte schneidet, wo dann der diesbezügliche Strahl $|O_1\sigma|$ die o_1 in O_4 trifft. Auf dem s-Träger erhält man die ausser O_2 noch restlichen zwei Curvenpunkte $\sigma_1\sigma_2$ unmittelbar als Schnitte derjenigen zwei $\bar{x}$-Tangenten, die aus dem S-Centrum an den Grundkegelschnitt k laufen.

306. Wenn das Erzeugungsgesetz der C_4^3 im Auge behalten wird, wornach ein Strahlenbüschel O_1 mit einem Tangentensysteme $\bar{x}$ eines Kegelschnitts k in Beziehung tritt, kann man aus dem letzteren ein zweites Strahlenbüschel dadurch herleiten, dass man das System der Berührpunkte $\bar{X}$ der $\bar{x}$-Tangenten mit einem beliebigen Punkte z. B. Ω_1 des Grundkegelschnitts k durch Gerade verbindet. In Folge dessen erhält man zwei projectivische Büschel $O_1\Omega_1$, deren Erzeugniss ein Kegelschnitt K_β ist. Dieser besitzt ausser den Büschelmittelpunkten $O_1\Omega_1$, noch mit dem Grundkegelschnitte vier gemeinschaftliche Punkte, wo-

von einer durch Ω_1 vertreten ist, so dass also noch ein Tripel $\bar{\beta}$-Punkte erübrigt, von denen übrigens ein Paar auch imaginär sein darf. Aus der zugrundeliegenden Constructionsbeziehung der Curve C_4^3 sowie jener der Kegelschnitte kK_β erkennt man bei einiger Ueberlegung, dass zwischen den beiden Curven kC_4^3 in den $\bar{\beta}$-Elementen eine gegenseitige Berührung besteht, weshalb als Resultat folgt: „Der Grundkegelschnitt k ist ein die Plancurve C_4^3 dreimal berührender Kegelschnitt."

Bekanntlich sind die entsprechenden Elemente des gemeinsamen Strahles $|O_1\Omega_1|$ die Tangenten des Kegelschnitts K_β in den Büschelmittelpunkten $O_1\Omega_1$. Als Element des Büschels Ω_1 trifft nämlich die Gerade $|O_1\Omega_1|$ den Grundkegelschnitt k in einem $\bar{X}$-Punkte, dessen $\bar{x}$-Tangente auf o_1 einen ξ-Punkt incident hat. Die Verbindungslinie $|S\xi|$ ruft auf s einen σ-Punkt hervor, und so erhalten wir die Kegelschnittstangente des Büschelcentrums O_1 in der Geraden $|O_1\sigma|$. Andererseits schneidet der Strahl $|O_1\Omega_1|$, indem wir ihn als Element des Büschels O_1 ansehen, den s-Träger in einem Punkte σ'; die Gerade $|S\sigma'|$ erzeugt auf der Geraden o_1 einen Punkt ξ'; die aus ξ' an den Grundkegelschnitt laufende Tangente $\bar{x}'$ berührt den letzteren in dem Punkte $\bar{X}'$ und es ist die Verbindungslinie $|\Omega_1\bar{X}'|$ die in Ω_1 an K_β ziehende Tangente.

Der Verfolg der Construction zeigt uns auch den in (305) bezeichneten Punkt O_4 als ein Element des Kegelschnittes K_β an. Die Curve C_4^3 hat somit ausser

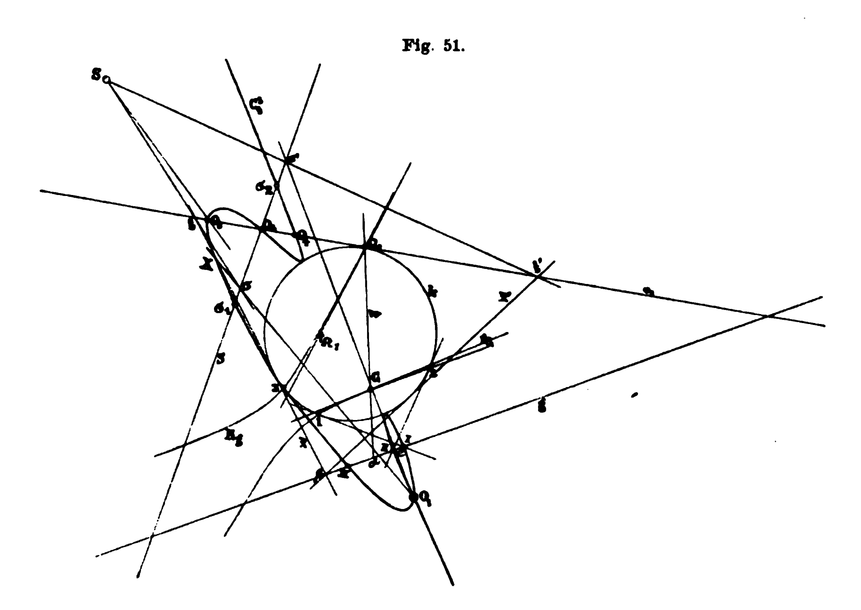
den drei $\bar{\beta}$-Punkten noch die Punkte $O_1 O_4$ mit K_β gemeinschaftlich, was im Ganzen, da O_1 als Doppelpunkt zu zählen ist, sechs Elemente umfasst. Da ein Kegelschnitt mit einer Curve 3ter Ordnung $2 \cdot 3 = 6$ Punkte gemein hat, so ist zu constatiren, dass ausser den genannten fünf Punkten keine anderen den beiden Curven gleichzeitig angehören können.

307. Die Lage des Doppelpunktes O_1 gegen den Grundkegelschnitt k bedingt die Art seiner Singularität in der Plancurve C_4^3. Er ist Knoten, Einsiedler oder Rückkehrpunkt, wenn er ausserhalb, innerhalb oder auf dem Grundkegelschnitt vorkommt. Im letzteren Falle degenerirt die Curve in eine C_3^3, welche wir unten separat betrachten werden. Nur in Bezug der Tangenten des O_1-Punktes ist das in (304) darüber Gesagte dahin zu ergänzen, dass das Tangentenpaar $d_1 d_1'$, wie ja selbstverständlich, im zweiten Falle, wo O_1 innerhalb von k liegt und für die Curve C_4^3 ein isolirter Punkt ist, imaginär wird; dass aber im dritten Falle eines Rückkehrpunktes O_1 dieses Tangentenpaar in Coincidenz gelangt und so die Spitzentangente d_1 wird. Die in O_1 als Punkt des Grundkegelschnitts k gehende Tangente des letztern trifft den o_1-Träger in einem ξ-Elemente und die Verbindungslinie $|S\xi|$ den s-Träger in einem σ-Punkte. Es ist demnach der Strahl $|O_1\sigma| \equiv d_1$ die Spitzentangente der betreffenden Curve vom Symbole C_3^3.

§ 14. **Curven mit Doppelpunkt.**

308. Eine beliebige Gerade g in der Ebene einer C_4^3, deren Erzeugung (Fig. 51.) nach den Gesetzen

Fig. 51.



dieses Abschnittes erfolgt, indem man sie auf einen ihrer sie dreimal berührenden Kegelschnitte k als Grundcurve abbildet, enthält mit ihr drei gemeinsame Schnittpunkte I II III, wie es ihrer Ordnung gemäss sein muss. Zur Bestimmung dieser Schnittelemente soll folgender Weg eingeschlagen werden.

Ist X ein Curvenpunkt, der durch die Grundconstruction in (303) entstanden ist, so liegt er gleichzeitig auf einem Strahle des Doppelpunktes O_1 und auf der diesem Strahle projectivisch entsprechenden $\bar{x}$-Tangente des Grundkegelschnitts k, welcher die

Curve C_4^3 dreimal berührt. Während nun der Doppelpunktsstrahl $|O_1 X|$ auf der g-Geraden einen Punkt α ausschneidet, trifft die $\bar{x}$-Tangente dieselbe Gerade in einem Punkte β; von diesem zieht aber noch eine zweite Tangente $\bar{x}'$ an den Grundkegelschnitt k, welcher wieder ein zweites Punktenelement α' auf g entspricht. Dieses letztere findet man durch Anwendung der Grundconstruction auf die $\bar{x}'$-Tangente, indem auf dem s-Träger ein Punkt σ' erfolgt und der Strahl $|O_1\sigma|$ den α'-Punkt hervorbringt.

Vorstehender Zusammenhang resultirt: dass einem α-Elemente der g-Geraden immer nur ein einziges β-Element auf derselben entsprechend ist, dass aber einem jeden β-Elemente stets ein Paar Elemente $\alpha\alpha'$ zukommen, weshalb zu folgern ist: „Die beiden auf g coaxialen Punktenreihen $\beta, \alpha\alpha'$ sind ein-zweideutig."

Die Coincidenz von zwei entsprechenden Elementen der Reihen $\beta, \alpha\alpha'$ bedingt ein Doppelelement derselben, also offenbar einen Punkt von C_4^3, und da dieser Fall nach (21) dreimal, ein imaginäres Paar inbegriffen, stattfindet, so erhalten wir das Doppelelemententripel I II III. Dieses Punktentripel wird, je nach der Lage seines Trägers g in der Ebene, Coincidenzen zu zwei und zu drei Elementen bilden können, wodurch für die Plancurve C_4^3 einfache und Doppelpunkts-Tangenten oder Wendetangenten entstehen, keinesfalls aber jemals Doppeltangenten, welche bekanntlich ein Elementenquadrupel in paarweiser Gruppirung erfordern, wie solche in Curven 4ter Ordnung möglich sind.

309. Die Grundconstruction (303) setzt für jede $\bar{x}$-Tangente einen ξ-Punkt auf dem o_1-Träger voraus. Die Polaren solcher ξ-Punkte in Bezug des Grundkegelschnitts k formiren nach (306) ein Strahlenbüschel, dessen Centrum im Punkte Ω_1 ist. Der vor. Art. hat gezeigt, dass einem ξ-Punkte ein einziger α-Punkt zugewiesen ist. Die Grundkegelschnittspolaren dieser α-Punkte der g-Geraden formiren ein zweites Strahlenbüschel, das seinen Mittelpunkt im Pole G der g-Geraden bezüglich des Kegelschnitts k hat. Wir erhalten damit ein Strahlenbüschel G, welches mit dem oben charakterisirten Strahlenbüschel vom Centrum Ω_1 projectivisch ist und einen Kegelschnitt Kg erzeugt, der die Punkte $G\Omega_1$ incident enthält. Ausser Ω_1 besitzt Kg mit dem Grundkegelschnitte k noch drei gemeinschaftliche Punkte 1 2 3, welche die Punkte I II III, vermittels der in ihnen gezogenen Grundkegelschnittstangenten, nach der Grundconstruction abbilden.

Nimmt man auf der g-Geraden zwei Curvenpunkte I II als gegeben an, so kann nach (270) der Tripelpunkt III linear construirt werden, ohne dass man den Bildkegelschnitt Kg graphisch hervorruft, sobald wir der weiter unten folgenden Beziehung (312) gedacht haben werden.

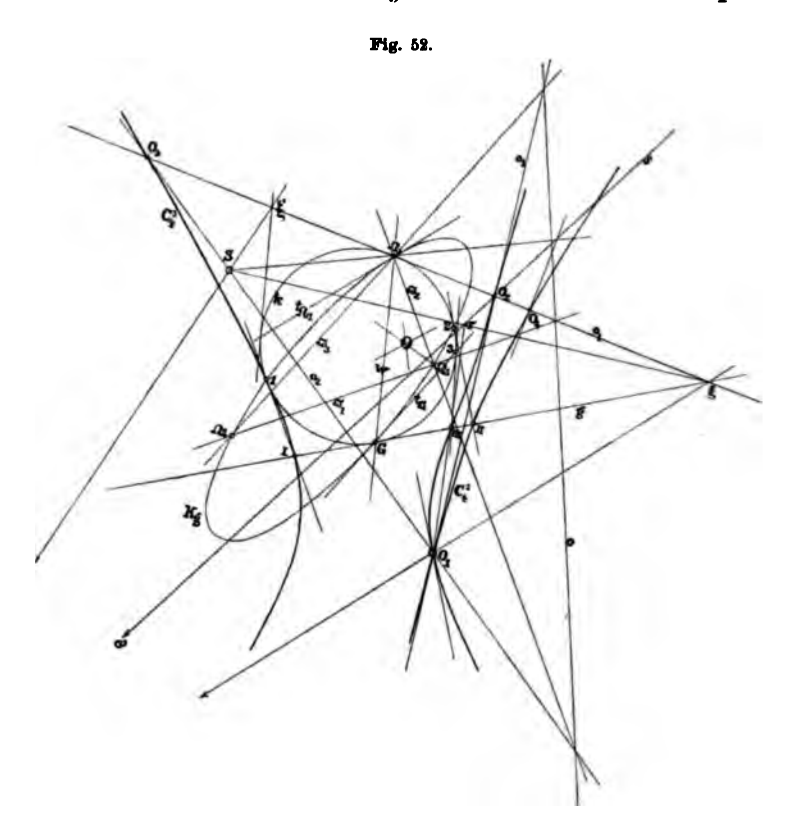
310. Eine ausgezeichnete Rolle unter den g-Geraden der Plancurve C_4^3 spielt deshalb die unendlich weite Gerade $g\infty$ ihrer Trägerebene, als sie die

Asymptotenpunkte der Curve bedingt. Wie man weiss, besitzt eine C_4^3 nach (271) drei derartige Elemente, von welchen auch zwei imaginär sein oder eine Coincidenz bilden können. Endlich ist die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, dass alle drei Elemente eine Identität ausmachen. Der $g\infty$ entspricht ein Bildkegelschnitt $Kg\infty$, welcher mit dem Grundkegelschnitte k ausser dem Ω_1-Punkte noch die Bilder der Asymptotenpunkte der Curve gemeinsam hat. Selbstverständlich identificirt sich diesfalls der Büschelmittelpunkt G mit dem Mittelpunkte $\bar{M}$ des Grundkegelschnitts k.

311. Ist die g-Gerade eine Grundkegelschnittstangente $\bar{x}$, so wird (Fig. 52.) ihr Bildkegelschnitt Kg ausser den beiden Büschelcentren $\Omega_1 G$, von welchen sich aber jetzt G mit dem Berührpunkt $\bar{X}$ der $\bar{x}$-Tangente identificirt und ebenfalls ein Punkt des Grundkegelschnitts k ist, diesen letzteren nur mehr in einem Punktenpaare 1 2 durchsetzen, das die Schnitte $I\ II$ abbildet. Bedenkt man jedoch, dass einem Elemente der auf $g\equiv\bar{x}$ befindlichen α-Reihe die bezügliche Polare als Strahl des Büschels $G\equiv\bar{X}$ zukommt, so ist zu erkennen, dass die im G-Centrum ziehende Tangente an den Kegelschnitt Kg den Grundkegelschnitt k zum andern Male in einem Punkte 3 trifft, der offenbar den Tripelpunkt III abbilden muss. Die Construction gestaltet sich demgemäss höchst einfach folgend: Wir verbinden den ξ-Punkt von $g\equiv\bar{x}$ mit dem Centrum

S durch einen Strahl, der den s-Träger in einem σ-Elemente schneidet: Die Verbindungslinie $|O_1\sigma|$ trifft unmittelbar die g-Gerade in dem Tripel-

Fig. 52.



punkte III. Selbstverständlich ist die Polare des III-Punktes die im Punkte G an Kg bestimmte Tangente, welche analog wie in (306) gefunden wird, wenn man sie als das dem Coincidenzstrahle $|\Omega_1 G| \equiv w$ entsprechende Element im G-Büschel behandelt.

Vorstehende Untersuchung zeigt uns also in erster Linie, dass man ein Element des Tripels $I\,II\,III$

jedenfalls linear findet. Wenn nun weiter beachtet wird, dass von dem Bildkegelschnitt Kg stets fünf Elemente durch die angeführte Construction festgestellt werden können, so ergibt sich auch mittelst einer bekannten Elementarconstruction das restliche Punktenpaar des Tripels $I\,II\,III$ linear. Hieraus folgt der Satz: „Die Schnittpunkte einer ebenen C_4^3 mit einer Geraden, welche einen die Curve dreimal berührenden Kegelschnitt tangirt, erfolgen durch eine Linearconstruction."

312. Die bemerkenswerthen Eigenschaften der Punkte $O_1O_2O_3$ auf der Plancurve C_4^3 gelangen präciser zum Ausdrucke, wenn wir dieselben, wie in früheren Betrachtungen, als eine Hauptdreiecksfigur der Curve charakterisiren, welche zu ihrer polaren Figur im Grundkegelschnitte derart gegenüber gestellt wird, dass damit eine quadratisch verwandte Beziehung zwischen der Curve C_4^3 und dem sie dreimal berührenden Kegelschnitt k erfolgt. Wir weisen diesbezüglich auf die Analogie der betreffenden Beziehung zwischen einer C_6^4 und einem sie viermal berührenden Kegelschnitt hin, welche im VII. Abschnitte des II. Theils dieses Buches ihre Untersuchung gefunden hat. Wenn wir nun in diesem Sinne die Polaren $\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3$ der Hauptpunkte $O_1O_2O_3$ auf dem Kegelschnitte k ausmitteln, so bilden die ersteren ein Dreiseit, dessen Ecken $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ sind. Die beiden Figurenpaare $O_1O_2O_3$, $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$; $o_1o_2o_3$, $\tilde{\omega}_1\tilde{\omega}_2\tilde{\omega}_3$, als Dreiecke angesehen, sind

perspectivisch, d. h. die Verbindungslinien ihrer gleichindextirten Hauptpunktenpaare treffen sich in einem Punkte O und die Schnittpunkte der gleichindextirten Hauptseitenpaare liegen auf einer Geraden o: der Polaren von O bezüglich des Grundkegelschnitts; man kann also jetzt beide im obigen Sinne einer quadratischen Verwandtschaft als Hauptdreiecke behandeln. Diese Anschauung lässt uns vor allem wieder den bekannten Satz aussprechen: „Die gesammten g-Geraden in der Ebene der Curve C_4^3 sind bildlich einem Kegelschnittsnetze Kg conjugirt, dessen Grundpunkte die Hauptpunkte $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$ sind.“

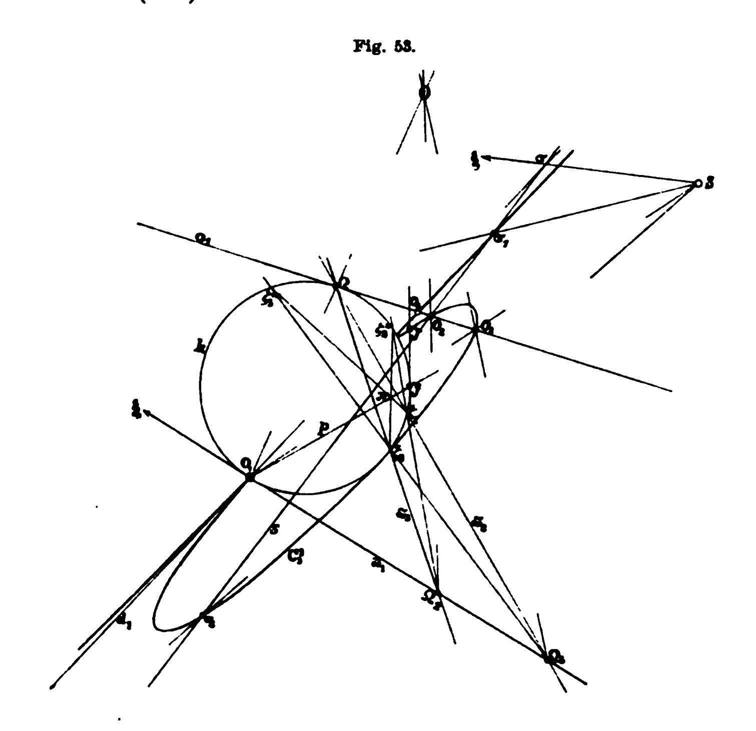
Die Constructionen, welche sich auf Sekanten, Tangenten etc. beziehen, werden auf dem Grundkegelschnitte k die gleiche Durchführung erfahren müssen, wie dieses gelegentlich der Abbildung einer Curve 3ter Ordnung auf einem sonst beliebigen Kegelschnitte im Eingange dieses Buchtheiles besprochen wurde. Unterschiedlich ist nur die bildliche Uebertragung aus dem Grundkegelschnitte in die Plancurve, und da wir in dem Vorhergehenden die betreffende Methode genügend auseinander gesetzt glauben, so können wir den Fall der Abbildung einer C_4^3 auf einem sie dreimal berührenden Kegelschnitte als vollkommen erledigt ansehen.

§ 15. Curven mit Rückkehrpunkt.

313. Die wesentlichsten Eigenschaften und Gesetze einer Spitzencurve C_3^3 sind in § 10. erklärt

worden. An diesem Ort wollen wir uns hauptsächlich nur mit der Abbildung einer C_3^3 auf einem sie berührenden Kegelschnitte beschäftigen. Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, werden die zu Grunde liegenden Annahmen des Artikels (303) mit jenen des Artikels (307) zusammenzuhalten sein, nach welchen

Fig. 53.



der Singularpunkt O_1 (Fig. 53.) auf dem Grundkegelschnitt k liegen muss. Die punktenweise Erzeugung der C_3^3 nach (303) wird durch diese Speciallage von O_1, der also jetzt ein Rückkehrpunkt ist, keine wesentliche Veränderung erleiden, und die Construction der Spitzentangente d_1 zeigt Artikel (307). Für den Grundkegelschnitt k bedeutet der O_1-Punkt zwei ge-

meinschaftliche Curvenpunkte, weshalb zwischen k und der C_3^3 nur mehr vier solche Punkte vorkommen können; diese letztern paaren sich wieder in zwei $\bar{\beta}$-Berührungspunkten, die wir mit Hilfe des in (306) bezeichneten Kegelschnittes K_β erhalten; somit der Satz: „Eine ebene Spitzencurve C_3^3 erscheint auf einem sie doppelt berührenden, den Rückkehrpunkt enthaltenden Kegelschnitte quadratisch abgebildet."

Die Polaren $\tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3$ der Punkte $O_1 O_2 O_3$ geben das Hauptdreieck $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$, von welchem bereits in (312) die Rede war, wobei zu bemerken kommt, dass jetzt die Polare $\tilde{\omega}_1$ die in O_1 laufende Grundkegelschnittstangente ist. Wir wissen und erinnern uns der Eigenschaft, welche das Dreieck $\Omega_1 \Omega_2 \Omega_3$ für die transformatorische Beziehung hat, dass dessen Ecken die Basispunkte des Kegelschnittsnetzes sind, dessen Individuen dem Systeme aller Geraden g der Curve C_3^3 entsprechen, und dass demnach dieselbe Bemerkung, welche am Schlusse des vorigen Artikels in Bezug der verschiedenen Constructionen von Sekanten, Tangenten etc. gemacht wurde, auch für die vorliegende Curve C_3^3 am Platze ist.

Wir haben in der Figur 53. nur die Construction des einzigen Inflexionspunktes J, den bekanntlich eine C_3^3 besitzt, angezeigt, welche Construction nach (301) linear und sehr einfach durchzuführen ist. Darnach wird der Grundkegelschnitt k von den Dreiecksseiten $\tilde{\omega}_2 \tilde{\omega}_3$ in den Punkten $\zeta_2 \zeta_3$ geschnitten; projicirt man diese Punkte aus den Ecken $\Omega_2 \Omega_3$ abermals auf k, so

finden sich die Punkte $\zeta_2''\zeta_3'''$. Nun erfolgt die Construction:

$$(|\zeta_2\zeta_3'''|, \quad |\zeta_3\zeta_2''| \equiv \pi.$$

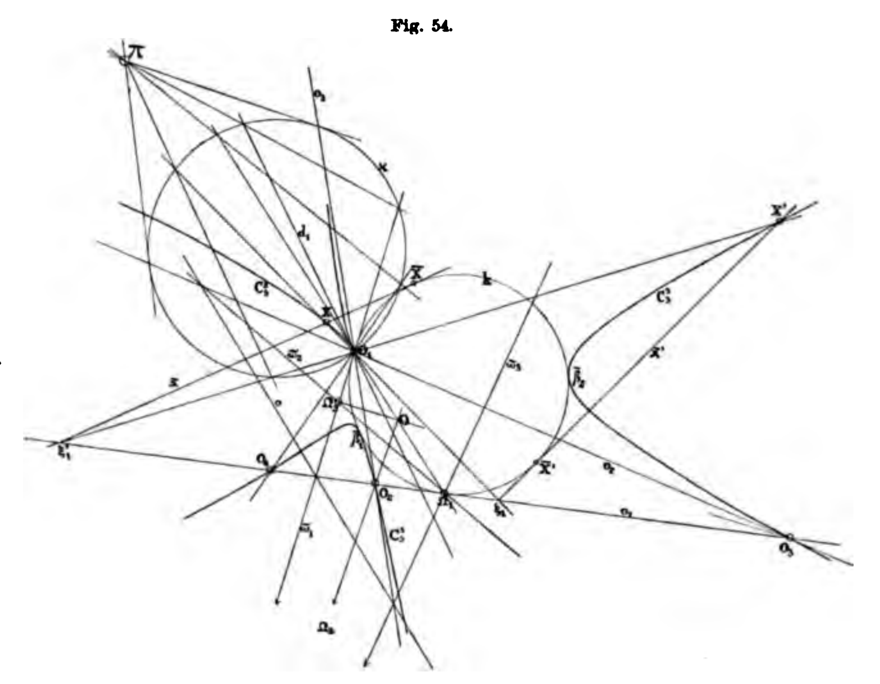
Die Verbindungslinie $|O_1\pi| \equiv p$ schneidet auf dem Kegelschnitt k das Bild $\bar{J}$ aus, dessen Transformation nach der Grundconstruction (303) den Inflexionspunkt J von der Spitzencurve C_3^3 hervorbringt.

314. Die Erzeugung und Abbildung einer C_3^3 auf einem sie zweimal berührenden Kegelschnitt, der noch ihren Spitzenpunkt incident hat, kann auch nach jenen Grundsätzen geschehen, welche wir bei Curven 4ter Ordnung bezüglich ihrer sie viermal berührenden Kegelschnitte [Abschn. VII u. XII, II. Thl.] angewendet haben. Wir wollen den Gang der Sache ganz kurz andeuten, um nicht unnöthig in Wiederholungen zu verfallen.

Soll eine C_3^3, deren Hauptdreieck $O_1O_2O_3$ so gegeben ist, dass O_1 den Rückkehrpunkt bedeutet, erzeugt werden, so muss (Fig. 54.) der Grundkegelschnitt k durch O_1 laufen und die Hauptseite $o_1 \equiv |O_2O_3|$ in einem Punkte Ω_1 berühren. In dieser Voraussetzung nehmen wir weiter einen sonst beliebigen durch O_1 gehenden Constructionskreis $\varkappa$ an, welcher von den Geraden $o_2 \equiv |O_1O_3|$, $o_3 \equiv |O_1O_2|$ in Punkten getroffen wird, deren Tangenten sich in dem Involutionscentrum Π schneiden. Die Kreisinvolution Π verbindet perspectivisch durch die O_1-Strahlen auf der o_1-Geraden eine Punkteninvolution $\xi_1\xi_1'$. Jedem Strahle $|O_1\xi_1|$

weisen wir die aus dem conjugirten ξ_1'-Punkte an den Grundkegelschnitt ziehende Tangente $\bar{x}$ projectivisch zu; beide Gerade schneiden sich in einem X-

Fig. 54.



Punkte der Plancurve C_3^3. Selbstverständlich gilt, wegen der involutorischen Beziehung der $\xi_1\xi_1'$-Elemente, die Vertauschung der Rollen der sich in X-Punkten schneidenden Strahlenpaare. Auf diese Weise werden also die Punkte der Curve C_3^3 durch die entsprechenden Tangenten des Grundkegelschnitts hervorgebracht, und wenn man an Stelle einer $\bar{x}$-Tangente ihren Berührpunkt $\bar{X}$ am Grundkegelschnitte substituirt, so erscheint die Plancurve C_3^3 punktenweise auf k abgebildet (303).

315. Die Construction der Spitzentangente d_1 ist höchst einfach: Die Grundkegelschnittstangente $\bar{\omega}_1$ von O_1 trifft den Kreis $\varkappa$ in einem Punkte, dessen conjugirter in der Π-Involution mit O_1 durch einen Strahl verbunden wird; der letztere Strahl ist die verlangte d_1.

Die Berührpunkte der C_3^3 mit k erfolgen durch den Kegelschnitt K_β in (306). Da K_β das Erzeugniss der dort definirten Büschel $O_1\Omega_1$ ist, deren Centra jetzt gleichzeitig auf k liegen, so bleiben, wie schon im vorigen Artikel gesagt wurde, nur zwei Berührpunkte $\bar{\beta}$ übrig, welche aber leicht durch eine simple Linearconstruction auffindbar sind.

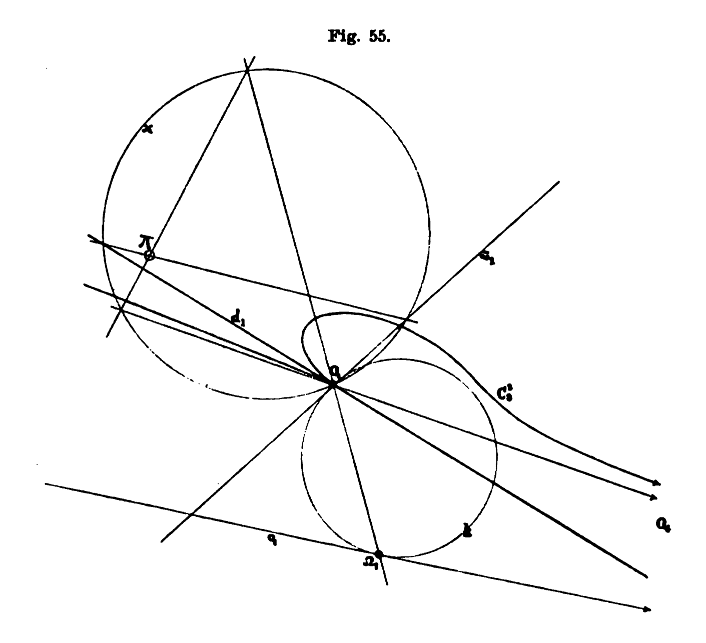
Ausser den Hauptpunkten O_2O_3, welche in der C_3^3 einfache Elemente, in der $\xi_1\xi_1'$-Involution auf o_1 jedoch die Doppelelemente sind, gibt es, wie in (305) angemerkt ist, noch einen dritten Punkt O_4, den die Curve auf o_1 enthält. Dieser O_4-Punkt erfolgt nachstehend. Der Strahl $|O_1\Omega_1|$ trifft den Constructionskreis $\varkappa$ in einem Punkte, dessen conjugirter in der Π-Involution mit dem Centrum O_1 durch eine Gerade verbunden wird. Letztere Gerade zeigt O_4 auf dem o_1-Träger an. Man wird sich übrigens ohne Schwierigkeit überzeugen, dass O_4 der conjugirte des Berührpunktes Ω_1 in der Involution $\xi_1\xi_1'$ ist. Hieraus folgern wir die Harmonität:

$$(O_2O_3,\ \Omega_1O_4) = -1.$$

316. Identisch wie in (312) bilden die Polaren $\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3$ der Hauptpunkte $O_1O_2O_3$ in Bezug des Grund-

kegelschnitts k in dem Systeme dieses letzteren ein Hauptdreieck $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ von gleicher Eigenschaft insofern, als alle Geraden g des Curvensystems C_3^3 ein Kegelschnittsnetz formen, dessen Individuen dem Dreiecke $\Omega_1\Omega_2\Omega_3$ umschrieben sind. Vice versa die gleiche Eigenschaft sämmtlicher Geraden des Grundkegelschnitts für das Netz von den Basispunkten $O_1O_2O_3$.

Fig. 55.



Es ist noch (Fig. 55.) des Falles zu gedenken, wo die Π-Involution elliptisch ist; hier werden die O_2O_3-Punkte imaginär, und die o_1-Linie wird von der C_3^3 nur den einzigen O_4-Punkt nachweisen. Selbstverständlich wird die $\xi_1\xi_1'$-Involution auf o_1 durch zwei Paare conjugirter Elemente angegeben sein müssen und das Π-Centrum wird ein Punkt innerhalb des Kreises $\varkappa$ sein. In unserer Figur sind die $\bar{\beta}$-Punkte

imaginär, d. h. der Grundkegelschnitt k enthält von der vorliegenden C_3^3 einzig und allein den Spitzenpunkt O_1 als ein reelles Element.

Fünfter Abschnitt.

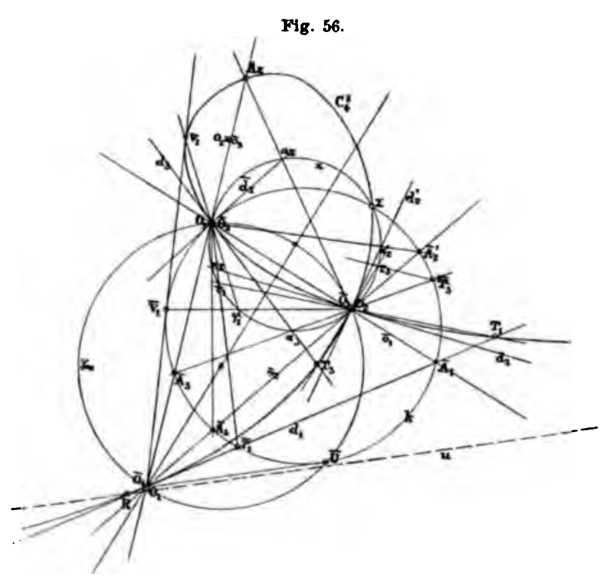
Die Inversion.

§ 16. Lagenbedingung des Grundkegelschnitts und der Doppelpunkt.

317. Eine ebene Curve 3ter Ordnung kann in mancher Hinsicht vortheilhaft als involutorische Curve eines Kegelschnitts studirt werden. Nach den in (50) entwickelten Grundsätzen der Inversion muss ein Grundkegelschnitt k, so wie bei jeder quadratischen Verwandtschaft, einen Hauptpunkt des Fundamentaldreiecks $O_1 O_2 O_3$ enthalten. Denken wir uns also (Fig. 56.) dieses Dreieck sammt dem Inversionskegelschnitt $\varkappa$ wie in dem citirten Artikel vorgelegt, wobei das Centrum O_1 der Polaren $|O_2 O_3| \equiv o_1$ gegenüberliegt. Von den beiden Hauptpunkten $O_2 O_3$ ist einer dem anderen invers homolog, d. h. wenn der Grundkegelschnitt k den einen durchzieht, ist der andere der Doppelpunkt der inversen Curve C_4^3; das Centrum O_1 ist aber sich selbst entsprechend, weshalb es auch den Singularpunkt in der C_4^3 bilden wird, sobald der Grundkegelschnitt durch dasselbe geht. Wir müssen demnach festhalten an den Identitäten: $O_1 \equiv \overline{O}_1$; $O_2 \equiv \overline{O}_3$; $O_3 \equiv \overline{O}_2$ der congruenten Hauptdreiecke

$O_1 O_2 O_3$, $\bar{O}_1 \bar{O}_3 \bar{O}_2$ in den Systemen $\Sigma\bar{\Sigma}$ der Ebene, von welchen das erstere der Träger der Curve C_4^3, das letztere aber der Träger des mit C_4^3 inversen Grundkegelschnitts k ist.

Fig. 56.



Die punktenweise Entstehung der C_4^3 unterscheidet sich nicht wesentlich von derjenigen, die wir bei einer Inversen 4ter Ordnung (X. Abschn. II. Thl.) auseinandergesetzt haben. Ein Strahl des Inversionscentrums $O_1 \equiv \bar{O}_1$ trifft nämlich den Grundkegelschnitt k im Allgemeinen in zwei Punkten $\bar{X}$, und wenn wir einen solchen $\bar{X}$-Punkt aus den Hauptpunkten $\bar{O}_2 \bar{O}_3$ auf den Inversionskegelschnitt $\varkappa$ nach $\bar{X}_2 \bar{X}_3$ projiciren, so werden sich die Verbindungslinien $|\bar{O}_3 \bar{X}_2|$, $|\bar{O}_2 \bar{X}_3|$ mit jenem Strahle von O_1 gemeinsam in dem Curvenpunkte X schneiden, der also nach dem Grundgesetze von $\bar{X}$ durch den Kegelschnitt $\varkappa$ harmonisch getrennt ist.

318. Unter den Nachbarpunkten $\bar{A}\bar{A}'$ sind in den vorausgegangenen Betrachtungen die Schnitte des Grundkegelschnitts k mit einer Seite des Hauptdreiecks $\bar{o}_1\bar{o}_2\bar{o}_3$ verstanden worden, welche den betreffenden Doppelpunkt des Erzeugnisses abbilden. Eine Uebereinstimmung dieser Eigenschaft wird auch jetzt bestehen, und wir werden damit zur Construction der Doppelpunktstangenten geführt. Um die Begriffe festzuhalten, gehen wir am besten von einer bestimmten Annahme aus.

Der Kegelschnitt k laufe z. B. durch den Hauptpunkt $\bar{O}_2$, in welchem Falle wir wissen, dass O_2 der Doppelpunkt der Inversen C_4^3 ist. Schneidet nun k die Seite $\bar{o}_2$ in reellen oder imaginären $\bar{A}_2\bar{A}_2'$-Punkten, so ist O_2 Knoten oder Einsiedler; im letzteren Falle giebt es keine Doppelpunktstangenten. Im ersten Falle finden wir auf dem Inversionskegelschnitte $\varkappa$ durch die Strahlen aus $\bar{O}_2$ die Projectionspunkte $\alpha_2\alpha_2'$ deren Verbindung mit O_2 die Doppelpunktstangenten d_2d_2' hervorbringt.

In der vorausgesetzten Annahme kann der Grundkegelschnitt die Seiten $\bar{o}_1\bar{o}_3$ nur noch in den bezüglichen Punkten $\bar{A}_1\bar{A}_3$ treffen. Die Projektion von $\bar{A}_3$ auf $\varkappa$ aus $\bar{O}_3$ ist α_3 und die Verbindungsgerade $|O_3\alpha_3| \equiv d_3$ ist Curventangente des Hauptpunktes O_3, der für die C_4^3 einen einfachen Punkt vorstellt. Das Inversionscentrum ist gleichfalls ein einfaches Punktenelement der C_4^3, dessen Tangente d_1 unmittelbar mittelst der Geraden $|O_1\bar{A}_1|$ erfolgt. Die Eigenschaft der

Tangenten $d_1 d_3$ als einfache Elemente des Curvenerzeugnisses C_4^3 hat zur Folge, dass diese Tangenten noch je einen, immer reellen Tangentialpunkt besitzen müssen. Der letztere ist aber höchst einfach zu finden. Es trifft nämlich die vorhin genannte Verbindungslinie $|\bar{O}_3 \bar{A}_3|$ den Grundkegelschnitt k noch ein Mal in dem Bilde $\bar{T}_3$ des fraglichen Tangentialpunktes T_3 der Tangente d_3. Noch unmittelbarer erhält man das inverse Bild des Tangentialpunktes T_1 der Tangente d_1 in jenem Schnitte $\bar{T}_1$, den diese Tangente d_1 auf dem Grundkegelschnitte ausser dem oben bezeichneten Nachbarpunkt $\bar{A}_1$ ein zweites Mal hervorbringt.

Wir müssen noch auf folgenden Umstand aufmerksam machen. Von den Hauptlinien $o_1 o_2 o_3$ ist die Gerade o_2 diejenige, welche ausser den zwei Hauptpunkten $O_1 O_3$ des vorliegenden Beispiels noch einen dritten Curvenpunkt A_{II} wegen der Ordnung der C_4^3 enthalten muss. Diese Eigenschaft kann bei den Hauptlinien $o_1 o_3$ deshalb nicht vorkommen, weil sie ihre Aufgabe gegen die Curve bereits vollständig erfüllen, denn jede enthält den Doppelpunkt O_2 und je einen der einfachen Punkte $O_1 O_3$ der Curve.

Die Construction des bezeichneten Tripelpunktes A_{II} geschieht analog, wie in (273), mit Hilfe der Grundkegelschnittstangente $\bar{d}_2$ im Hauptpunkte $\bar{O}_2 \equiv O_3$. Diese Tangente trifft den Inversionskegelschnitt $\varkappa$ im Punkte α_{II}, und der Strahl $|O_2 \alpha_{\text{II}}|$ schneidet auf der Hauptlinie $o_2 \equiv \bar{o}_3$ den fraglichen A_{II}-Punkt aus.

Nehmen wir jetzt den Grundkegelschnitt k so an, dass er das Centrum O_1 enthält. Da letzteres sich selbst conjugirt ist, so muss auch die Inverse C_4^3 dasselbe als Doppelpunkt haben. Er wird ein isolirter oder ein eigentlicher Doppelpunkt sein, wenn die Dreiecksseite $\bar{o}_1$ in einem Paare $\bar{A}_1\bar{A}_1'$ geschnitten wird, und wir finden sofort im letzteren Fall die Doppelpunktstangenten d_1d_1' als die Verbindungslinien dieser $A_1\bar{A}_1'$-Punkte mit O_1. Die Seiten $\bar{o}_2\bar{o}_3$ enthalten dann nur mehr die zwei Punkte $\bar{A}_2\bar{A}_3$, deren Verwendung zur Construction der beiden Tangenten d_2d_3 in den einfachen Curvenpunkten O_2O_3 nicht mehr schwer ist, wenn das Vorhergegangene berücksichtigt wird.

319. Bekanntlich gibt es in einer Curve 3[ter] Ordnung keine eigentlichen Verzweigungselemente, da man in ihrem Singularpunkte ausser den Doppelpunktstangenten keine andern Tangenten an die Curve ziehen kann. Wohl aber wird man im Systeme des Grundkegelschnitts k an diesen selbst aus zweien der Hauptpunkte $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$, von denen keiner dem Singularpunkte der Curve homolog ist, Tangenten ziehen können, die natürlich auch imaginär ausfallen können, was ganz von der Situation dieses Kegelschnitts gegenüber dem Dreieck $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ abhängt. In solchen Fällen ist der betreffende homologe Curvenhauptpunkt, da er nur ein einfaches Element der Curve vorstellt, ein gemeinschaftlicher Tangentialpunkt zweier Curventangenten, und die Berührpunkte

der Letzteren sind ein Paar conjugirte Elemente der absoluten Punkteninvolution 2ten Grades (§ 4.) auf der Curve. Derartige Tangenten werden bei einer Curve mit isolirtem Doppelpunkt stets reell sein, bei einer solchen jedoch mit einem Knoten nur dann, wenn der betreffende Hauptpunkt nicht auf der Schleife der Curve liegt. Um die Tangentenconstruction für einen als Tangentialpunkt vorkommenden Hauptpunkt, der wie bemerkt ein einfaches und sonst nicht weiter ausgezeichnetes Curvenelement ist, zu zeigen, sei das obige Beispiel in Fig. 56. vorausgesetzt, wo O_2 ein Knoten gewesen ist. Die Tangenten aus $\bar{O}_1$ an den Grundkegelschnitt berühren ihn in den Punkten $\bar{V}_1 \bar{V}_1'$, und die durch diese Punkte gezogenen $\bar{O}_3$-Strahlen (oder auch O_2-Strahlen) treffen den Inversionskegelschnitt k in den Projectionspunkten $\varphi_1 \varphi_1'$. Die Verbindungslinien der $\varphi_1 \varphi_1'$-Punkte mit dem betreffenden homologen Hauptpunkte O_3 (resp. O_2) schneiden die oben bezeichneten Tangenten aus $\bar{O}_1 \equiv O_1$ in den Punkten $V_1 V_1'$, und es ist weiter zu bemerken, dass diese Grundkegelschnittstangenten gleichzeitig die in $V_1 V_1'$ laufenden Curventangenten sind, deren gemeinschaftlicher Tangentialpunkt O_1 ist. Der letztere Umstand folgt aus der Identität: $\bar{O}_1 \equiv O_1$. Etwas anders verhält sich die Sache, wenn auch aus dem Hauptpunkte $\bar{O}_3$ an den Grundkegelschnitt reelle Tangenten gezogen werden könnten, was wie gesagt nur möglich wäre, sobald der homologe Hauptpunkt O_3 nicht auf dem Schleifentheile der Curve liegt. Allein auch

diesfalls unterliegt die Construction der betreffenden V-Punkte keiner Schwierigkeit, und wird mit Hilfe des Vorausgegangenen einfach auszuführen sein.

§ 17. Das Fundamentalnetz und das Geraden-System der Ebene.

320. Weil die unendliche Zahl von Geraden g der Ebene einer Curve C_4^3 ein Netz von Kegelschnitten γ, dessen Grundpunkte $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ sind, im Systeme des Grundkegelschnitts k invers abbildet, so wird vor allem in diesem Netze jener Kegelschnitt $\gamma\infty$ (217) ausgezeichnet sein, welcher der unendlich weiten Geraden $g\infty$ entspricht. Denn die gemeinsamen Schnittpunkte $\bar{U}$, welche dieser Kegelschnitt mit dem Grundkegelschnitte k besitzt, zeigen die drei Asymptotenelemente $U\infty$ der C_4^3 an. Die Richtung einer Asymptote u ist unmittelbar durch die Verbindungslinie $|\bar{O}_1\bar{U}|$ gegeben, während ihre Lage durch ihren Tangentialpunkt R fixirt erscheint. Das inverse Bild $\bar{R}$ des Tangentialpunktes wird gefunden, wenn der betreffende $\bar{U}$-Punkt der Construction in (272) unterworfen wird.

Sekanten, einfache und Inflexionstangenten entsprechen invers bestimmten Individuen des Fundamentalnetzes $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$, und wir haben den Constructionen dieser Gebilde nichts wesentlich Neues hinzuzufügen, was nicht schon in den vorausgegangenen Abschnitten wiederholt seine Erklärung gefunden hätte.

Auch in Bezug der gemeinschaftlichen Schnitt-

punkte, die zwischen den Kegelschnitten $k\varkappa$ stattfinden, berufen wir uns auf das in (221) Gesagte, indem dieselben hier wie dort Elemente der inversen Erzeugungscurve C_4^3 sein müssen. Geht demnach der Grundkegelschnitt durch einen der Hauptpunkte $\overline{O}_2\overline{O}_3$, so gehört dieser Punkt der Curve als einfaches Element an, und da k mit $\varkappa$ ausserdem noch drei Σ-Punkte gemein haben kann, so erhalten wir vier Elemente, welche gleichzeitig den Kegelschnitten $k\varkappa$ und der Curve C_4^3 angehören. Es folgt aus dem, dass beide Kegelschnitte noch je zwei mit der Curve gemeinschaftliche Punkte haben müssen, um die nothwendige Zahl $2 \cdot 3 = 6$ zu erhalten. Auf dem Inversionskegelschnitte $\varkappa$ ist aber dieser Bedingung bereits durch den Doppelpunkt, der jenem der Hauptpunkte $\overline{O}_2\overline{O}_3$ homolog ist, den der Grundkegelschnitt durchzieht, Genüge gethan, so dass also $\varkappa$ niemals andere als die bezeichneten mit der C_4^3 gemeinsamen Punkte besitzen wird. Es bleiben somit nur im Grundkegelschnitte noch ein Paar solcher Σ-Punktenelemente übrig.

Ist hingegen des Centrum O_1 Doppelpunkt von C_4^3, was immer der Fall ist, wenn der Kegelschnitt k diesen Punkt $O_1 \equiv \overline{O}_1$ durchzieht, so zählt er für zwei Elemente und k wird mit C_4^3 nur noch die vier mit $\varkappa$ vorkommenden Schnittpunkte gemein haben, während $\varkappa$ stets die vier letzteren und ausserdem die zwei Hauptpunkte O_2O_3 auf der Curve liegen hat.

Anmerkung: Die vorstehenden Untersuchungen einer inversen C_4^3 überheben uns, den Fall einer inversen C_3^3 speciell hier auszuführen,

weil die wesentlichsten Eigenschaften einer Curve mit Rückkehrpunkt in § 10. ohnedies betrachtet wurden. Eine solche Curve entsteht darnach durch den Situationsfall, in welchem eine Seite des Hauptdreiecks $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ den Grundkegelschnitt berührt.

Sechster Abschnitt.

Circulare Curven dritter Ordnung.

§ 18. Die Curve mit Doppelpunkt. (Quetelet'sche Focalen.)

321. Die in Rede stehende Curvenspecialität enthält die imaginären Kreispunkte auf der Geraden $g\infty$ ihrer Ebene incident, weshalb sie „circular" heisst. Da eine C_4^3 durch neun Punkte bestimmt ist, in welchen die imaginären Kreispunkte mitinbegriffen sein können, so ist der Satz evident: „Eine circulare C_4^3 ist durch sieben reelle Elemente vollkommen bestimmt." In Folge dieses Satzes spielen die circularen unter den Curven 3ter Ordnung überhaupt eine ähnliche Rolle, wie etwa der Kreis gegenüber den anderen Kegelschnitten.

Soll eine circulare C_4^3 in quadratische Verwandtschaft nach den von uns entwickelten Principien mit einem Kegelschnitte gebracht werden, so muss geschlossen werden, dass ihr Kegelschnittsbild, wegen der in (41) bedingten perspectivischen Beziehung zwischen der $g\infty$ und dem Hauptkreise, nur ein Kreis sein kann, weil bekanntlich nur ein solcher die imaginären Kreispunkte auf $g\infty$ mit der vorausgesetzten Curve perspectivisch gemein hat. Man kann deshalb auch von

einer „Kreisverwandtschaft“ sprechen und umschreibend (wie in (80)) eine circulare C_4^3 eine „Kreisverwandte“ nennen. Diese Gründe veranlassen folgenden Hauptsatz, der späterhin vielfach nützlich sein dürfte:

„Jedem Punkte einer circularen Plancurve 3ter Ordnung ist ein Netz von Kreisen zugewiesen, das in ihm seinen Grundpunkt hat; jedes Individuum des Netzes ist ein quadratisches Curvenbild für ein bestimmtes Hauptdreieck, dessen Ecken aus jenem Punkte, dem Doppelpunkte und einem variablen dritten Curvenpunkte bestehen. Durchläuft der variable Punkt die Curve, so durchlaufen ihre Kreisbilder als Individuen das Netz. In dieser Weise entsprechen die gesammten Kreise der Ebene in doppelter Unendlichkeit als Bilder der Curve, d. h. sie ist stets ein Kreisbild im Sinne der quadratischen Kreisverwandtschaft.“

322. Wegen ihrer Ordnung besitzt eine circulare C_4^3 auf der $g\infty$ neben den imaginären Kreispunkten stets noch einen reellen Asymptotenpunkt und folglich immer eine einzige reelle Asymptote. Sowohl der Tangentialpunkt der reellen Asymptote als auch der stets reelle Schnittpunkt der beiden imaginären Asymptoten, die wir kurzweg „Kreisasymptoten“ heissen, spielen eine ausgezeichnete Rolle. Insbesondere wird der Schnittpunkt der Kreisasymptoten das „Centrum“ der Curve genannt, und wenn dieses Centrum

auf der Curve selbst liegt, also gemeinschaftlicher Tangentialpunkt der imaginären Kreispunkte ist, so sind auch die letzteren conjugirte Elemente der absoluten quadratischen Involution der Curve (277).

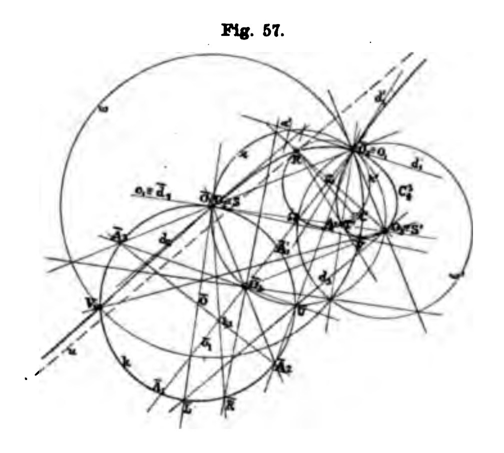
323. Zunächst wollen wir uns mit der Aufgabe befassen: „eine Kreisverwandte C_4^3 durch sieben Angabebedingungen zu bestimmen". Zu diesem Zwecke sind der Doppelpunkt O_1, welcher drei Elemente vertritt, und weitere vier Punkte $O_2 O_3 B C$, von denen keine drei in einer Geraden liegen dürfen, vorausgesetzt.

Wir umschreiben dem als Hauptdreieck gewählten Punktentripel $O_1 O_2 O_3$ den Hauptkreis $\varkappa$, und stellen die sonstigen Bedingungen der quadratischen Beziehung wie in (268) fest. Darnach finden wir die Bildpunkte $\overline{B}\overline{C}$ des gegebenen Punktenpaares BC, welche mit dem Hauptpunkte $\overline{O}_1 \equiv O_2$ drei genügende Elemente des Bildkreises k ausmachen.

Die Doppelpunktstangenten $d_1 d_1'$ sind wie (273) erhältlich; sie treffen den Hauptkreis $\varkappa$ in dem Punktenpaare $\alpha_1 \alpha_1'$, wodurch auf ihm nach (277) die Involution Π entsteht. Mit Hilfe des durch das Involutionscentrum Π gehenden Hauptkreisdurchmessers $|\sigma\sigma'|$ erhält man die Scheitel SS' der Plancurve, sofern die in (279) erklärten diesbezüglichen Constructionen auf dem Grundkreise k befolgt werden.

324. Das Dreieck O_1SS' ist bei O_1 rechtwinklig, weil es ja durch die Axenstrahlen gebildet wird; nehmen wir dasselbe als Hauptdreieck einer neuen quadratischen Beziehung an, so wird die Scheitelgerade, worunter die Verbindungslinie $|SS'|$ verstanden werden soll, ein Durchmesser des neuen Hauptkreises $\varkappa'$ und die Curve C_4^3 wird auf einem ebenfalls neuen Grundkreis k' abgebildet. Wollen wir

Fig. 57.



der bisher geläufigeren Bezeichnung getreu bleiben, und das Hauptdreieck O_1SS' ebenfalls $O_1O_2O_3$ bezeichnen, ohne damit das in (323) genannte zu verwechseln, so hat man sich also jedesmal die Identität der Elemente in den Tripeln $O_2S\sigma$, $O_3S'\sigma'$ zu vergegenwärtigen, und es wird demgemäss die Figur $O_1O_2O_3\bar{O}_3$ ein dem Hauptkreise $\varkappa'$ eingeschriebenes Rechteck sein müssen. (Fig. 57.)

Halten wir noch einen Augenblick die Beziehung des vor. Art. fest, und rufen uns die in (273) verzeichnete Construction der Curventangente d_2 ins

Gedächtniss, so wird es nicht schwer sein, umgekehrt die in $(O_2 \equiv) \bar{O}_1$ gehende Bildkreistangente $\bar{d}_1$ zu erlangen. Wir erinnern uns nämlich, dass dem Hauptpunkte $\bar{O}_1 (\equiv O_2)$ alle Punkte der Hauptlinie $|O_2 O_3| \equiv o_1$ entsprechen, folglich den Hauptstrahlen aus O_1 dieser Punkte die homologen Strahlen aus $\bar{O}_1 (\equiv O_2)$. Nun wird die Curve C_4^3 zum drittenmale von der o_1 in einem Punkte A_I geschnitten, woraus (273) zu folgern kommt, dass der homologe Strahl der Verbindungslinie $|O_1 A_I|$ nichts anderes ist, als die in $\bar{O}_1 (\equiv O_2)$ an den Bildkreis k gezogene Tangente $\bar{d}_1$. Die Construction dieser letzteren gestaltet sich demgemäss dahin, dass man den Punkt $(O_2 \equiv) \bar{O}_1$ mit jenem Kreisschnitte verbindet, der auf $\varkappa$ mittelst des durch den Hauptpunkt O_3 zur Geraden $|O_1 A_I|$ parallelen Strahles entsteht.

Nach dieser kurzen Abschweifung kehren wir (Fig. 57.) zu der obigen Identität: $O_2 \equiv S \equiv \sigma$; $O_3 \equiv S' \equiv \sigma'$ zurück, und fragen nach der in $O_1 (\equiv O_2)$ gehenden Tangente an den Bildkreis k. Eine kurze Ueberlegung der Construction im Zusammenhang mit der vorigen Erörterung bringt das Resultat, dass sich diese Tangente mit der Scheitelgeraden $|SS'| \equiv |O_2 O_3|$ identificirt. Aus dieser Untersuchung fliesst der Satz: „Wenn der Hauptkreis $\varkappa$ dem Axendreieke $O_1 SS'$ umschrieben ist, so berührt der Bildkreis k die Scheitelgerade $|SS'|$ in einem Scheitelpunkte der Plancurve C_4^3.“ (Man vergegenwärtige sich dabei die Identität: $|SS'| \equiv o_1 \equiv \bar{d}_1$.)

325. Vorstehendes Gesetz bedingt für den Bildkreis k einige charakteristische Eigenschaften, die zum Theile auch aus seiner Lage gegen den Hauptkreis $\varkappa$ hervorgehen, von denen folgende angemerkt werden sollen:

a) „Die Verbindungslinie der in (273) bezeichneten Punkte $A_2 A_3$ ist ein Durchmesser von k und steht auf der Hauptlinie $\bar{o}_1$ senkrecht.“

b) „Die zwei Kreise $k\varkappa$ schneiden sich bekanntlich in zwei Punkten reell, wovon der eine der Hauptpunkt $O_2 \equiv \bar{O}_1 \equiv S$, der andere $\bar{U}$ das Bild des reellen Asymptotenpunktes $U\infty$ von C_4^3 ist. Der Hauptstrahl $| O_3 \bar{U} |$, welcher nach oben die reelle Asymptotenrichtung der Curve direct anzeigt, trifft k nochmals in einem Punkte $\bar{L}$; die Strecke $\overline{\bar{L}\bar{O}_1}$ ist gleichfalls Durchmesser im Grundkreise k und zwar derjenige, welcher mit der Scheitelgeraden $| SS' | \equiv | O_2 O_3 |$ rechtwinklig ist.“

c) „Die Hauptstrahlen $| \bar{O}_2 \bar{A}_2 |$, $| \bar{O}_3 \bar{A}_3 |$ bilden jedesmal einen Winkel im Halbkreise $\varkappa$ wie auch im Halbkreise k mit dem gemeinsamen Scheitel im $\bar{U}$-Punkte.“

326. Die nächste der Beantwortung harrende Frage ist nach dem Tangentialpunkte der conjugirten Axenscheitel SS' gerichtet. Diese Frage wäre eigentlich nach der Construction in (272) zu erledigen; wir ziehen jedoch vor, die Tangenten in diesen Scheiteln nach (273) zu suchen, weil hierdurch die Lage des

fraglichen Tangentialpunktes unmittelbar definirt wird. Demzufolge erinnern wir uns, dass die Tangente $d_3 \equiv s'$ des Hauptpunktes $O_3 \equiv S'$ vermittelst jenes Hauptkreisschnittes entsteht, den der Strahl $|\bar{O}_3\bar{A}_3|$ erzeugt; nun fällt aber nach dem vorigen Artikel dieser Schnitt in den $\bar{U}$-Punkt, welcher den reellen Asymptotenpunkt der C_4^3 abbildet, woraus zu schliessen ist, dass die betreffende Scheiteltangente s' parallel der reellen Curvenasymptote u ist. Nothwendig muss die Tangente $s \equiv d_2$ im Scheitel $S \equiv O_2$ ebenfalls der Asymptotenrichtung gleichlaufen, weil SS' conjugirte Punkte der absoluten Involution sind, was sich übrigens auch bestätigt, sobald die Construction wie vorhin für d_2 mittelst des $\bar{A}_2$-Punktes angewendet wird. Somit der Satz:

„In einer Kreisverwandten C_4^3 ist der reelle Asymptotenpunkt der Tangentialpunkt der Scheiteltangenten."

327. Die Auseinandersetzungen in (280) bedingen auf der Scheitelgeraden $|SS'| \equiv |O_2O_3|$ den Begleiter T', welcher mittelst der Hauptkreis-Involution Π gefunden werden könnte, sobald diese selbst fixirt ist. Letzteres ist bis jetzt nicht der Fall, weil die alleinige Angabe des Scheitelpaares SS' und seines Tangentialpunktes $T\infty \equiv U\infty$ hierzu nicht ausreicht. Man geht aber dem gewünschten Ziele entgegen, sobald der Tangentialpunkt R der reellen Asymptote nach (272) aufgesucht ist.

Unmittelbarer lässt sich der Scheitelbegleiter T' nachstehend feststellen. In (324) hat man gesehen, dass die Bildkreistangente des O_2-Punktes mit der Scheitelgeraden $|SS'|$ zusammenfällt und dass demnach der dort bezeichnete A_l-Punkt sich jetzt identificirt mit dem Scheitelbegleiter T'. Um ihn also kürzest zu finden, ziehen wir durch das Centrum $\bar{O}_3$ einen zu $|SS'| \equiv |O_2O_3| \equiv o_1$ parallelen Strahl, verbinden dessen Hauptkreisschnitt mit O_1 durch einen Strahl, welcher die $|SS'|$ in T' trifft.

Wenn in der letzten Construction die in (324) gemachte Bemerkung im Auge behalten wird, dass die Figur $O_1O_2O_3\bar{O}_3$ ein Rechteck ist, dessen Diagonalen $o_1\bar{o}_1$ Durchmesser des Hauptkreises $\varkappa$ sind, so ergibt sich, dass die vorhin den T'-Punkt erzeugenden Geraden rechtwinklig sind, und dass in der Figur $O_1SS' \equiv O_1O_2O_3$, die wir das „Axendreieck" nennen, der T'-Punkt durch die bekannte Relation:

$$\overline{O_1T'} = \sqrt{\overline{ST'} \cdot \overline{S'T'}}$$

charakterisirt ist, welche in Worten sagt: „Der Scheitelbegleiter einer circularen Plancurve C_4^3 ist der Fusspunkt der mittleren geometrischen Proportionalen im Axendreiecke."

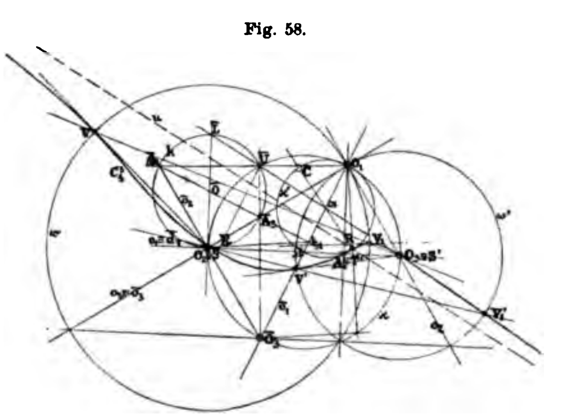
328. Hält man die Resultate, welche in den letzten Artikeln über das bezeichnete Punktentripel $T\infty T'R$ gewonnen wurden, zusammen mit dem Hauptsatze (280), so nimmt dieser für den vorliegenden Specialfall nachstehende Form an:

„In einer circularen C_4^3 ist der Scheitelbegleiter T' ein dem reellen Asymptotenpunkte $U\infty$ conjugirtes Element der absoluten quadratischen Punkteninvolution, weshalb die Verbindungslinie des Tangentialpunktes R der reellen Asymptote u mit dem Scheitelbegleiter T' in letzterem selbst eine Curventangente ist.“

Aus vorstehendem Satze ist abzuleiten, dass durch Bekanntgabe des Axendreiecks O_1SS' sechs Bedingungen erfüllt werden, und dass man deshalb den weiteren deriviren kann: „Eine circulare C_4^3 ist durch das Axendreieck und einem beliebigen ihrer Punkte vollkommen bestimmt.“ Im ersten Augenblicke könnte die Richtigkeit dieser Behauptung aus dem Grunde angezweifelt werden, als wir an anderer Stelle (323) ausdrücklich bedingt haben, dass keine drei von den Angabepunkten in gerader Linie liegen dürfen, was thatsächlich bei dem Tripel $SS'T'$ auf der Scheitelgeraden o_1 vorkommt. Dieser Einwurf wird jedoch in dem Momente hinfällig, als bedacht wird, dass die Angabe des T'-Punktes nicht nur einen Curvenscheitel als gleichzeitiges Bild eines Punktes des Grundkreises k, sondern auch die in ihm an den letztern gehende Tangente involvirt, durch welche Doppeleigenschaft der T'-Punkt eigentlich die Angabe von zwei Elementen ausspricht, und also unser Satz gerechtfertigt erscheint.

329. Dem Scheitelbegleiter T' kommt noch eine bemerkenswerthe Eigenschaft zu, wie die folgende Betrachtung ergeben wird. Bestimmt man (Fig. 58.) bezüglich des Grundkreises k die Polaren der Hauptpunkte $\overline{O}_2 \overline{O}_3$, so schneiden sie ihn in Punktenpaaren, welche gleichsam

Fig. 58.



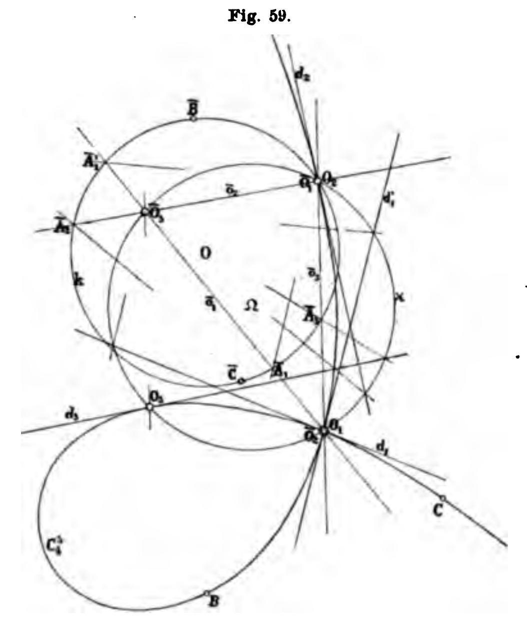
Verzweigungselemente VV_1 der eindeutigen Strahlenbüschel SS' auf der Curve C_4^3 abbilden, oder was dasselbe sagt: Jeder S-Scheitel ist Tangentialpunkt seines Verzweigungspaares, dessen Elemente conjugirt in der absoluten Curveninvolution sind. Die Punkte eines Verzweigungspaares VV_1 liegen auf einem der zwei Verzweigungskreise ww', der durch den Doppelpunkt O_1 geht und seinen Mittelpunkt im betreffenden S-Scheitel hat. Es lassen sich nachstehende zwei Sätze aussprechen: (Vergl. auch Fig. 57.)

a) „Die beiden Verzweigungskreise ww' durchsetzen einander orthogonal und besitzen mit dem Hauptkreise $\varkappa$ eine gemeinschaftliche Chordale, die sich mit der Scheitelgeraden | SS' ebenfalls rechtwinklig im Begleiter T' verschneidet.“

b) „Jedes Verzweigungspaar eines Scheitels hat den conjugirten Scheitel als Begleiter."

330. Es sei hierher passend eine Tangentenconstruction mittelst Kreisen eingeschaltet. Wenn (Fig. 59.) von einer Kreisverwandten C_4^3 der Doppelpunkt O_1 und ein sonst beliebiges Punktenquadrupel $O_2 O_3 B C$ bekannt sind, so kann man die Tangenten in den gegebenen Punkten auf folgende Art ermitteln. Man nimmt drei Punkte, worunter der Doppelpunkt immer zu zählen ist,

Fig. 59.



als Hauptdreieck $O_1 O_2 O_3$ an und fixirt die Beziehung einer quadratischen Verwandtschaft wie in (268). Die Bildpunkte $\bar{B}\bar{C}$ bestimmen mit dem Hauptpunkte $O_2 \equiv \bar{O}_1$ den Grundkreis k, worauf man die Tangenten der Punkte $O_1 O_2 O_3$ nach (273) erhält. Durch Variirung der gegebenen Curvenpunkte oder solcher, welche gelegentlich bei der Vervollständigung der Curve gefunden werden, mit dem Doppelpunkte O_1 zu einem Hauptpunktentripel wiederholt sich das gezeigte Ver-

fahren, so dass also jedesmal für ein beliebiges Punktenpaar die Curventangenten linear mit Hilfe von zwei Kreisen, deren einer der dem betreffenden Punktentripel umschriebene Hauptkreis, der zweite aber der bezügliche Bildkreis ist, hervorgehen. Die Eleganz dieser Construction spricht für sich selbst.

331. In (322) ist das Centrum einer circularen C_4^3 als der Schnittpunkt der imaginären Kreisasymptoten bezeichnet worden. Seine charakteristische Eigenschaft besteht darin: „dass alle Kreise, die man aus ihm als Mittelpunkt beschreibt, die C_4^3 in je zwei reellen oder imaginären Punkten treffen, deren Verbindungslinien ein Strahlenbüschel formen, von dem der Mittelpunkt der Tangentialpunkt R der reellen Asymptote ist.“ (Fig. 57., 58.)

Diese wichtige Eigenschaft des Centrums C bewirkt, dass man dasselbe mittelst zweier beliebiger Sehnenstrahlen des R-Punktes dadurch erhält, indem man in den Halbirungspunkten der Curven-Sehnenstrecken dieser Strahlen, auf die letzteren Normalen errichtet, deren Schnitt das fragliche Centrum ist. Die Construction setzt somit die Bekanntgabe des Tangentialpunktes R voraus, die aber wieder nach (272) erfolgt. Führt man besagte Construction wirklich am Bildkreise k aus, so muss der Bildpunkt $\overline{U}$ aus den Hauptpunkten $\overline{O}_2 O_3$ auf den Bildkreis projicirt werden; nun ist aber die Verbindungslinie der sich dabei ergebenden Projectionspunkte nichts anderes,

als die in (325) genannte Durchmesserlinie $|\bar{A}_2\bar{A}_3|$, welche gegen die Hauptlinie $\bar{o}_1 \equiv |\bar{O}_1\bar{O}_3|$ senkrecht steht und sie in einem Punkte ξ_1 trifft. Aus diesem Grunde wird der Strahl $|\bar{O}_1\xi_1|$ den Bildkreis k im Bilde $\bar{R}$ des Tangentialpunktes R so schneiden: „dass die Verbindungsgerade $|\overline{UR}|$ parallel der Hauptlinie $\bar{o}_1$ läuft," ein Merkmal, das eine wesentliche Vereinfachung der Construction ausdrückt. Verbindet man nun den R-Punkt mit einem beliebigen X-Punkte der Curve durch eine Gerade, so wird diese noch einen dritten Curvenpunkt X' enthalten und die Sehne $\overline{XX'}$ dient dann, wie vorhin gesagt wurde, zur Ermittlung des C-Centrums. Den X'-Punkt construiren wir einfach nach (270).

Noch unmittelbarer gelangen wir zur Kenntniss des Centrums, wenn wir bedenken, dass die betreffenden Sehnenstrecken derjenigen beiden R-Strahlen, welche durch die Punkte O_1 resp. T' ziehen, gleich Null sind. Werden somit gegen diese Strahlen in den bezeichneten Punkten Normalen errichtet, so ist deren Schnitt das Centrum C.

332. Hält man sich die Eigenschaft vor Augen, wornach die Figur $O_1CT'R$ bei O_1 und T' rechtwinklig ist, so folgt die Lage des C-Punktes auf einem Kreise $\varkappa'$, der das Tripel O_1RT' enthält; wir heissen ihn „Centralkreis" und definiren: „Das Curvencentrum einer circularen C_4^3 ist der Endpunkt jenes Diameters im Centralkreise,

welcher durch den Tangentialpunkt der reellen Asymptote geht."

Eine besondere Eigenschaft des Centralkreises $\varkappa'$ erfolgt in dem Falle (324), wo der Hauptkreis $\varkappa$ dem Axendreiecke O_1SS' umschrieben ist. Berücksichtigt man bei dieser Annahme gleichzeitig das in (327) bewiesene Gesetz über den Scheitelbegleiter T' auf der Hauptlinie o_1 sowie auch den ebenda gezeigten Umstand, dass die beiden Hauptlinien $o_1\bar{o}_1$ Durchmesser des Hauptkreises $\varkappa$ sind, so ist damit eine metrische Beziehung begründet, die sich in dem Satze fasst:

„Wenn der Hauptkreis $\varkappa$ dem Axendreiecke umschrieben ist, so liegt der Mittelpunkt $\bar{\omega}$ des Centralkreises $\varkappa'$ auf der Hauptlinie $\bar{o}_1 \equiv |\bar{O}_2\bar{O}_3|$ und sein Durchmesser ist gleich dem Radius des Hauptkreises."

333. Wir haben jetzt den speciellen Fall zu untersuchen, bei welchem (Fig. 60.) das Centrum C ein Punkt der C_4^3 ist. Von früher ist in Erinnerung geblieben, dass das Centrum den Schnittpunkt der imaginären Kreisasymptoten bedeutet, also immer ein reeller Punkt sein muss, der, sofern er ein Curvenpunkt wird, Tangentialpunkt der Kreisasymptoten ist. Dieser Fall charakterisirt demnach die imaginären Kreispunkte der $g\infty$ als conjugirte Elemente der absoluten Curveninvolution (277).

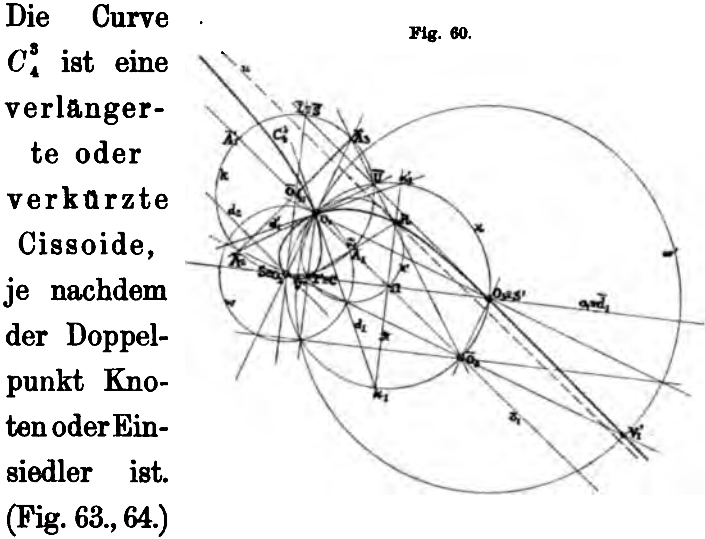
In Bezug der Lage des Centrums C als Curven-

punkt müssen hauptsächlich drei Fälle unterschieden werden:

a) „Das Centrum identificirt sich mit dem Scheitelbegleiter.“ Die Curve C_4^3 ist eine Quetelet'sche Focale à noeud mit einer Schleife und aufeinander senkrecht stehenden Knotentangenten. (Fig. 60.)

b) „Das Centrum fällt mit einem Scheitel zusammen.“ Die Curve C_4^3 ist eine verlängerte oder verkürzte Cissoide, je nachdem der Doppelpunkt Knoten oder Einsiedler ist. (Fig. 63., 64.)

Fig. 60.



c) „Das Centrum liegt im Doppelpunkt.“ Die circulare C_3^3 ist die Cissoide des Diokles mit einem Rückkehrpunkte. (Fig. 65.)

In den zwei letzten Fällen ist die Curve symmetrisch und die reelle Asymptote u ist eine Inflexionstangente, deren $U\infty$-Punkt sich also mit dem betreffenden J-Punkte identificirt.

334. Hält man (Fig. 60.) den Satz über die Bestimmung des Scheitelbegleiters T' in (327) mit

demjenigen in (332) zusammen, wornach das Curvencentrum C mittelst jenes Centralkreisdurchmessers, der dem R-Punkte angehört, gefunden wird; verbindet man weiter damit die Beziehung in (328), nach welcher aus dem R-Punkte neben der reellen Asymptote noch eine zweite Tangente an die C_4^3 läuft, deren Berührpunkt der Scheitelbegleiter T' ist, so kommt man zu dem Schlusse, dass in einer Quetelet'schen Focale à noeud die Angabe eines Punktenelementes in dem Paare RT' das andere von selbst nach sich zieht. Dies gibt den Satz:

„Eine Quetelet'sche Focale à noeud ist durch Angabe des Axendreiecks ausreichend bestimmt."

§ 19. Die Spitzencurve.

335. Nach den Principien der Kreisverwandtschaft wird man eine circulare Spitzencurve vom Symbole C_3^3 auf einem Grundkreise k abbilden können, welcher einen Punkt $\bar{O}_1$ des Hauptdreiecks $\bar{O}_1\bar{O}_2\bar{O}_3$ durchzieht und die Linie $\bar{o}_1 \equiv |\bar{O}_2 O_3|$ in einem Punkte $\bar{A}_1$ tangirt. Im Systeme der Curve C_3^3 ist der Hauptpunkt O_1 des Dreiecks $O_1O_2O_3$ der Rückkehrpunkt, in welchem sie die Spitze formt, und der zur Geraden $|\bar{O}_1\bar{A}_1|$ homologe Strahl, welcher nach (299) zu bestimmen sein wird, ist die Spitzentangente d_1. Die zur Vervollständigung der circularen C_3^3 nothwendigen sonstigen Constructionen und Beziehungen sind in dem Vorhergegangenen enthalten und müssen als bekannt vor-

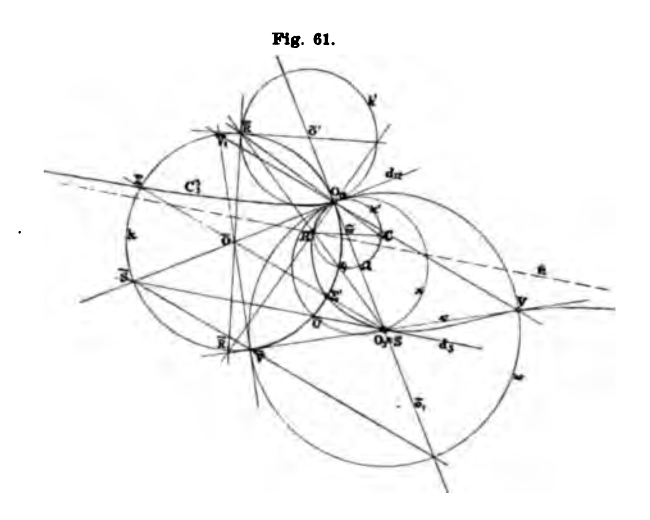
ausgesetzt werden. Wir wenden uns sofort zur Untersuchung der absoluten Punkteninvolution.

Wir wissen aus (277), dass überhaupt in einer beliebigen C_3^3 die absolute Involution den parabolischen Fall bildet, indem das Centrum derselben in den Rückkehrpunkt O_1 fällt, welche Eigenschaft gewissermaassen einen Zerfall der quadratischen Punkteninvolution nach sich zieht und die Curvenpunkte mit ihren Tangentialpunkten zwei projectivische Systeme vorstellen. Halten wir jedoch den ursprünglich involutorischen Charakter des absoluten Systems fest, so wird die auf dem Hauptkreise $\varkappa$ aus O_1 perspectivische Projection dieser Involution mittelst der Spitzentangente d_1 das Centrum Π in O_1 coincidirend erzeugen, und es zeigt (279) der durch Π gezogene Hauptkreisdiameter in seinem zweiten Endpunkte das Perspectivbild σ eines Axenscheitels S der Curve, während der andere Scheitel S', sowie dessen Perspectivbild σ', sich ebenfalls mit dem O_1-Punkte vereinigen. Die letztere Identification hat auch die weitere zwischen dem O_1-Punkte und dem Scheitelbegleiter T' (280) zur Folge, so dass das Axendreieck degenerirt und durch die beiden sich schneidenden Geraden d_1, $|O_1S|$ repräsentirt wird. Sieht man von den bemerkten im O_1-Punkte stattfindenden Coincidenzen ab, so darf der Satz gelten: „Eine circulare Spitzencurve C_3^3 besitzt nur einen Axenscheitel.“

336. Die Gedankenführung des vor. Art. begreift (Fig. 61.) in sich einerseits ein Zusammenfallen der

Hauptpunkte $O_1 O_2$, was wir durch den Punkt O_{12} ausdrücken wollen, andererseits ein gleiches Ineinanderfallen der Punkte $O_3 \bar{O}_3$ mit dem S-Scheitel der Curve. Wir haben diesen Fall in (46) b) angemerkt, indem wir

Fig. 61.



sagten, dass die Hauptlinie $o_3 \equiv \bar{o}_3$ als Hauptkreissehne immer weiter rückt, ohne ihren Parallelismus aufzugeben, bis endlich im O_{12}-Punkte eine Tangention eintritt, und dass der gleiche Vorgang mit der Geraden $|O_3 \bar{O}_3|$ in ihrem Berührpunkte S am Hauptkreise $\varkappa$ zu denken ist. Ist dieser Vorstellung gemäss von einer Kreisverwandten C_3^{3} der Rückkehrpunkt O_{12} und der Scheitel S gegeben, so muss die Spitzentangente d_{12} mit der Verbindungslinie $|O_{12} S| \equiv \bar{o}_1$ rechtwinkelig sein. Es wird also für die jetzige Beziehung die Strecke $\overline{O_{12} S}$ der Durchmesser des Hauptkreises $\varkappa$.

Die angedeutete Specialisirung modificirt die Grundaufgabe (268) folgend: „Um von einem Punkte X der

circularen C_3^3 das Bild auf dem Grundkreise k zu finden, verbindet man diesen Punkt mit den Hauptpunkten $O_{12}S$ durch Gerade; zu $|O_{12}X|$ wird in S ein Parallelstrahl gezogen und sein Hauptkreisschnitt mit O_{12} durch eine Gerade verbunden; letztere schneidet sich mit dem Strahle $|SX|$ in dem fraglichen Bildpunkte $\overline{X}$."

337. „Eine circulare C_3^3 ist durch den Rückkehrpunkt, den Scheitel und einen beliebigen andern ihrer Punkte vollständig bestimmt." Die Richtigkeit dessen ist leicht einzusehen, wenn vor Allem bedacht wird, dass der Rückkehrpunkt vier Bedingungen entspricht. Die Angabe des Scheitels drückt insofern zwei weitere Bedingungen aus, als damit gleichzeitig die Spitzentangente bekannt wird. Wir haben also zusammen sieben Elemente der Curve vorhanden, welche ihr nach (321) genügen müssen.

338. In Voraussetzung der Annahmen des Art. (336) und der Angabe eines sonst noch beliebigen Curvenpunktes X kann der Bildkreis k einfach fixirt werden. Der Coincidenzhauptpunkt O_{12} vereinigt nämlich in sich (335) noch einen Scheitel, und zwar insbesondere im O_2-Punkte; infolge dessen muss der Bildkreis k nach (324) die Scheitelgerade $|O_{12}S|$ im O_{12}-Punkte berühren und sein Mittelpunkt liegt auf der Spitzentangente d_{12}. Nun braucht man nur noch die Grundconstruction mit der in (336) gegebenen Modification

für den X-Punkt der Annahme zu verbinden, womit das Bild $\overline{X}$ erfolgt, und sohin der Kreis k festgesetzt erscheint.

Immerhin lässt sich in der Angabe ein Curvenpunkt durch ein äquivalentes Curvenelement ersetzen. Von Interesse ist diesbezüglich jener Fall, wo die reelle Asymptotenrichtung u bekannt ist. Man hat dann durch den Hauptpunkt $S \equiv O_3$ einen der Asymptotenrichtung gleichlaufenden Strahl zu ziehen, der den Hauptkreis $\varkappa$ im Bilde $\overline{U}$ des reellen Asymptotenpunktes $U\infty$ und die Spitzentangente d_{12} im Bilde $\overline{S}$ des Curvenscheitels S trifft. Dieses Resultat im Vereine mit dem vorigen bestimmt unzweifelhaft wieder den Bildkreis k.

Nach (326) ist die reelle Asymptotenrichtung parallel einer Scheiteltangente, woraus folgt: „Eine circulare C_3^3 ist auch durch den Spitzenpunkt, den Scheitel und dessen Tangente bestimmt.“

339. Der Eigenschaften über die Verzweigungskreise w einer Kreisverwandten C_4^3 ist in (329) gedacht worden. Im gegenwärtigen Falle einer ebensolchen vom Symbole C_3^3 kommt zu bemerken, dass es nur die einzige Verzweigungstangente v des S-Scheitels gibt, deren Berührpunkt V auf jenem w-Kreise liegt, welcher aus S mit dem Halbmesser $O_{12}S$ beschrieben wird. Wie man sieht, berührt dieser w-Kreis im O_{12}-Punkte den Hauptkreis $\varkappa$ wegen der in (329) vorkommenden Chordalenbeziehung, weil jetzt

der Scheitelbegleiter im Rückkehrpunkte O_{12} coincidirt und die betreffende Chordale zur Spitzentangente d_{12} geworden ist.

Der Bildkreis k durchsetzt den Verzweigungskreis w rechtwinklig. Dieses geschieht ausser in dem Rückkehrpunkte O_{12} noch in einem zweiten Punkte $\overline{V}$, der den einzigen Verzweigungspunkt V des S-Scheitels abbildet. Diese metrische Eigenschaft leitet, wenn die vorhin gedachte Beziehung zusammengehalten wird, zu dem Hauptsatze: „Hauptkreis, Bildkreis und Verzweigungskreis schneiden einander rechtwinklig."

Hieraus folgt eine höchst einfache Construction nicht nur im Allgemeinen für die Curve C_3^3, sondern insbesondere auch speciell linear für den Verzweigungspunkt V des S-Scheitels.

340. Man kann die Erzeugung einer Kreisverwandten C_3^3 auch in die nachstehende Form kleiden: „Jeder Strahl des Scheitels S trifft den Bildkreis k in zwei reellen oder imaginären Punkten $\overline{X}\overline{X}'$, die zwei Durchmessern dieses Kreises angehören, deren andere Endpunkte $\overline{X}_1\overline{X}_1'$ sind. Zieht man durch die letzteren Strahlen des O_{12}-Centrums, so sind diese die entsprechenden des zuerst in S angenommenen Strahles und schneiden ihn in einem Punktenpaare XX' der Plancurve C_3^3." Damit gewinnen wir eine äusserst einfache Entstehungsweise von einer circularen Spitzencurve 3ter Ordnung, und zwar, wie leicht zu erkennen

ist, wieder durch ein Paar ein-zweideutige Strahlenbüschel, wovon das eindeutige in S, das zweideutige in O_{12} seinen Mittelpunkt hat; beide Büschel sind durch das Diameterbüschel $\bar{O}$ des Bildkreises k auf einander bezogen.

Die Punktenpaare $\bar{X}\bar{X}'$ formiren auf k eine quadratische Involution vom Centrum S; diese wird durch S selbst perspectivisch auf der Curve C'^3_3 abgebildet, wo sie also ebenfalls in S central ist; ihre Doppelelemente sind durch das Punktenpaar $O_{12}V$ vertreten. Verbindet man die Punkte XX' durch Gerade mit dem O_{12}-Punkte, so entsteht auf der Curve eine Strahleninvolution, deren Doppelstrahlen die Gerade $|O_{12}V|$ und die Spitzentangente d_{12} sind. Die Verbindungslinie $|S\bar{O}|$ trifft k in den Axenpunkten $\Sigma\Sigma'$ der Involution $\bar{X}\bar{X}'$, deren Verbindungslinien mit dem O_{12}-Centrum die Axen der erklärten Strahleninvolution vom Centrum O_{12} sind. Die zwei definirten Axenpunkte $\Sigma\Sigma'$ sind die zwischen der C^3_3 und dem Bildkreise k, ausser dem Rückkehrpunkte O_{12}, gemeinschaftlichen Punkte.

341. Die nächste Aufgabe, mit der wir uns zu beschäftigen haben, betrifft die Ermittlung des Curvencentrums C der Kreisverwandten C'^3_3. Zu diesem Zwecke erinnere man sich an die metrische Beziehung in (332), wornach der Radius des Centralkreises halb so gross von jenem des Hauptkreises ist, sein Mittelpunkt $\bar{\omega}$ auf der Hauptlinie $\bar{o}_1 \equiv |O_{12}S|$ liegt und er

selbst durch den Singularpunkt O_{12} gehen muss. Jeder Kreis, der seinen Mittelpunkt auf $\bar{o}_1$ hat und durch O_{12} zieht, ist ein die Curve C_3^3 im Rückkehrpunkte osculirender Kreis, weil er in O_{12} die Curve nicht nur schneidet, sondern auch berührt, denn die Spitzentangente d_{12} ist gleichzeitig die betreffende Kreistangente. Ein solcher Kreis kann deshalb nur mehr einen einzigen Curvenpunkt besitzen, was wir durch folgendes Kriterium einsehen. Im O_{12}-Punkte vereinigt der betrachtete Kreis drei Punktenelemente der Curve wegen seiner osculatorischen Eigenschaft; zwei weitere Elemente sind durch die imaginären Kreispunkte vertreten, weil ja Kreis und Curve circular sind. Da ein Kegelschnitt mit einer Curve 3[ter] Ordnung sechs Elemente gemein hat, so bleibt nur noch ein einziges übrig, welches aber immer reell sein wird. Für den Centralkreis $\varkappa'$ ist das letztere nach (332) der Tangentialpunkt R der reellen Asymptote, und wir wissen von dorther, dass der Diameterstrahl $|R\bar{\omega}|$ den Centralkreis $\varkappa'$ in dem gesuchten Curvencentrum C trifft.

Vorstehende Construction des C-Centrums bedingt also die Bekanntgabe des Tangentialpunktes R, welchen wir aber sehr einfach nach (331) bekommen. Die Gerade $|\bar{U}\bar{R}| \parallel \bar{o}_1 (\equiv |O_{12}S|)$ gibt das Bild $\bar{R}$ auf dem Grundkreise k; der in dem letzteren diametrale Gegenpunkt ist $\bar{R}_1$. Mittelst der in (340) verzeichneten Construction erfolgt:

$$(\ \bar{R}S\,|,\ \ |\,\bar{R}_1 O_{12}\,|) \equiv R.$$

Noch einfacher kann man den R-Punkt erzielen, wenn man den ausser O_{12} zweiten Chordalenschnitt ϱ, der zwischen dem Grund- und Centralkreise stattfindet, durch einen S-Strahl verbindet; dieser letztere trifft unmittelbar den Centralkreis in R.

Endlich drückt sich noch die Construction des Tangentialpunktes R der reellen Curvenasymptote u durch nachstehende metrische Relation aus, sobald das $\dddot{R}$-Bild bekannt ist:

$$\overline{R\overline{R}} = \overline{SR} = \frac{\overline{S\overline{R}}}{2}.$$

342. Der Centralkreis, den wir mit $\varkappa'$ bezeichnet haben, enthält sozusagen in O_{12} zwei Hauptpunkte der Curve C_3^3, wo er gleichzeitig die Spitzentangente d_{12} berührt. Nach (52) g) muss sein Bild ein Kegelschnitt sein, und eine kurze Ueberlegung zeigt, dass dasselbe nichts anderes, als wieder ein Kreis k' ist, der ganz analoge Eigenschaften wie der ursprüngliche zeigt. Dieser Bildkreis k' wird somit gleichfalls seinen Mittelpunkt auf der Hauptlinie $\bar{o}_1 \equiv | O_{12}S |$ liegen haben und die Plancurve C_3^3 im O_{12}-Punkte osculiren. Wir geben das folgende Gesetz an: „Das Bild des Centralkreises $\varkappa'$ ist ein Kreis k', der dem Hauptkreise $\varkappa$ congruent ist und seinen Mittelpunkt auf $\bar{o}_1$ hat; er berührt im O_{12}-Punkte die Kreise $\varkappa\varkappa'$ und osculirt wie diese dort selbst die Spitzencurve; die Chordale der zwei Bildkreise kk' enthält als Strahl des O_{12}-Punktes den R-Punkt und das

Curvencentrum C, wobei folgende Kreissehnen-Relation stattfindet:

$$\overline{O_{12}C} = \frac{\overline{C\bar{R}}}{2}.$$

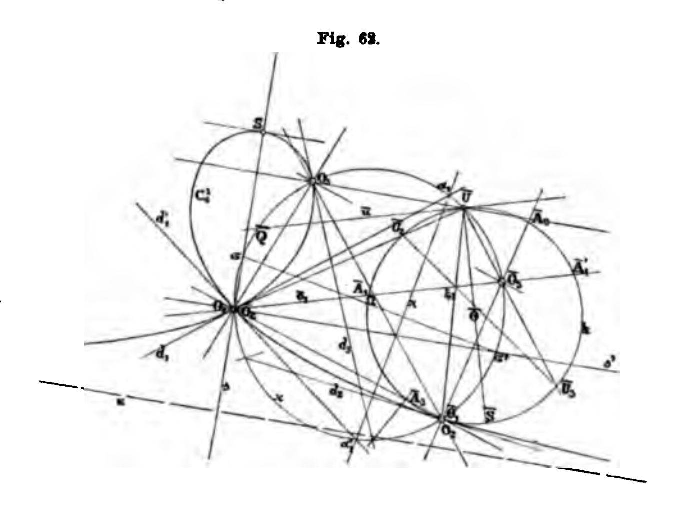
§ 20. Symmetrische Curven (Cissoiden).

343. Es ist schon bei früherer Gelegenheit (333) die Eigenschaft der Symmetrie einer unicursalen Kreisverwandten 3ter Ordnung dahin bedingt worden, dass die reelle Asymptote auf der Curve eine Inflexion bildet. Um die Erzeugung symmetrischer Curven 3ter Ordnung durch Strahlenbüschel zu zeigen, werden wir uns zunächst über die Lage des betreffenden Kreisbildes k einer solchen Curve Klarheit schaffen müssen. Hierbei knüpfen wir an die vorausgegangenen Beziehungen an, die offenbar dem Wesen nach deshalb nicht alterirt werden.

In Erwägung der charakteristischen Eigenschaft, dass (Fig. 62.) die reelle Asymptote u eine Wendetangente ist, vereinigt dieselbe in ihrem unendlich fernen Berührpunkt $U\infty$ auch den ihr zukommenden Tangentialpunkt. Diese Coincidenz des $U\infty$-Punktes wird bildlich auf den gedachten Grundkreis k nach jenem Punkte $\bar{U}$ übertragen, der neben dem Hauptpunkte $O_2 \equiv \bar{O}_1$ als Schnitt von k mit dem Hauptkreise $\varkappa$ resultirt. In diesem $\bar{U}$-Punkte muss man sich also auch das Bild $\bar{R}$ des unendlich weit liegenden Tangentialpunktes R der Asymptote hineinfallend vorstellen. Die Ermittlung des besagten $\bar{R}$-Bildpunktes geschieht durch Anwendung der schon oft citirten Construction im Ar-

tikel (272). Setzen wir einstweilen stillschweigend den Bildkreis k als schon fixirt voraus, so werden wir in Ausführung der erwähnten Construction auf k

Fig. 62.



ein Paar Projectionspunkte $\overline{U}_2\overline{U}_3$ durch Strahlen der Centra $\overline{O}_2\overline{O}_3$ erhalten, deren Verbindungslinie auf der Hauptlinie $\bar{o}_1 \equiv | O_1\overline{O}_3 |$ einen $\mathfrak{x}_1$-Punkt hervorbringt. Liegt nun dieser $\mathfrak{x}_1$-Punkt gleichzeitig auf der Chordalen $|\bar{O}_1\overline{\overline{U}}|$ der Kreise $k\varkappa$, so sind die Elemente des $\overline{U}R$-Paares in Coincidenz und die reelle Asymptote u ist der gemachten Bedingung gemäss augenblicklich Inflexionstangente.

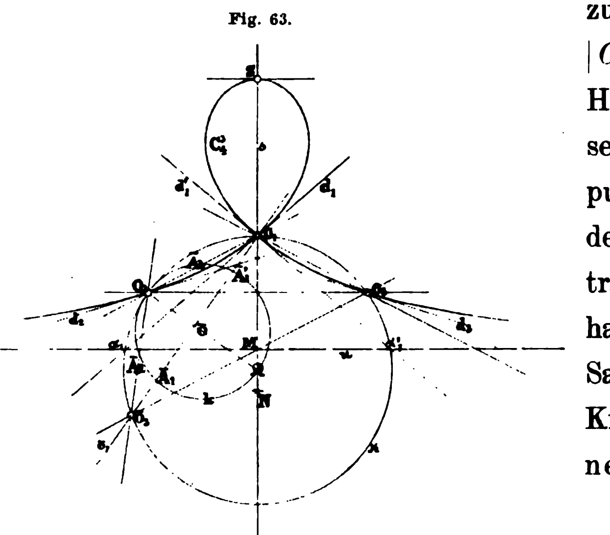
344. In dem Punktenpaare $\bar{A}_1 A_1'$ schneidet für eine C_4^3 nach (269) die Hauptlinie $\bar{o}_1$ den noch immer als vorhanden gedachten Bildkreis k, womit sich nach (273) die Doppelpunktstangenten $d_1 d_1'$ bestimmen. Diese treffen den Hauptkreis $\varkappa$ in dem Paare $\alpha_1\alpha_1'$,

und wenn im Kreise $\varkappa$ der Durchmesser $|\sigma\sigma'| \perp |\alpha_1\alpha_1'|$ gezogen wird, so sind die aus dem Doppelpunkte O_1 nach den Punkten $\sigma\sigma'$ laufenden Geraden ss' die Axenstrahlen der absoluten Involution, welche nach (279) die symmetrische Curve C_4^3 in ihren Scheiteln SS' treffen. Aus der Situation sieht man, dass der eine Curvenscheitel in den Punkt $U\infty$ der Wendetangente hineinfällt. Letztere Thatsache lässt sich am Kreisbilde k erkennen, weil der zu dem Sehnenstrahle $|\overline{A}_1 A_1'| \equiv \bar{o}_1$ normale Bildkreisdurchmesser nothwendig durch den $\overline{U}$-Punkt geht und somit in ihm wirklich das Bild des einen Curvenscheitels vereinigt, während in seinem anderen Endpunkte $\overline{S}$ der eigentliche Curvenscheitel abgebildet ist. Dieses Merkmal verursacht: „dass der Axenstrahl s des endlich gelegenen Scheitels S eine Symmetrale der C_4^3 ist, während der zweite Axenstrahl s' die Richtung der reellen Inflexionsasymptote u angibt.“ Diese zwei aufeinander senkrecht stehenden Richtungen werden durch die Verbindungslinie $|O_3\overline{U}|$ bekannt.

345. Geht man (Fig. 63.) der oben in (343) erwähnten Construction des $\overline{R}$-Punktes mit Bedacht nach, so findet man aus Gründen der Symmetrie, dass die Gerade $|\overline{U}_2\overline{U}_3|$ parallel zur Hauptlinie $\bar{o}_1$ ist, weshalb der Constructionsstrahl $|\overline{O}_1\xi_1\infty|$ eine im Punkte $\overline{O}_1$ gemeinschaftliche Tangente der Kreise $k\varkappa$ sein muss. Diese Constellation bedingt aber, wie einige Ueberlegung zeigt, einen Zusammenfall der

Punkte $\overline{U}\overline{R}\overline{O}_1$, was nur dann möglich ist, wenn, wegen der symmetrischen Lage der Hauptpunkte $O_2 O_3$ zur Geraden $|O_1 S| \equiv s$, der Hauptkreis $\varkappa$ seinen Mittelpunkt Ω auf der Symmetralen s liegen hat. Somit der Satz: „Das Kreisbild einer symmetrischen Plancurve 3ter Ordnung mit Doppelpunkt berührt den Hauptkreis, sobald dieser seinen Mittelpunkt in der Symmetrieaxe befindlich hat.“

Fig. 63.



346. Wenden wir für eine kurze Zeit nochmals unsere Aufmerksamkeit der in Fig. 62. ursprünglich allgemeiner vorausgesetzten Lagenbeziehung des Hauptkreises $\varkappa$ zu, wo dieser sich mit dem Bildkreise k in der Chordalen $|\overline{U}\dot{O}_1|$ schneidet. Die Richtung der reellen Curvenasymptote u ist allerdings mit dem Hauptstrahle $|O_3\overline{U}|$ gegeben, nicht aber ihre Lage. Denn wir wissen, dass der Tangentialpunkt der Asymptote, wegen ihrer Doppeleigenschaft als Inflexionstangente, gleichfalls unendlich weit liegt. Die zweite Con-

struction in (272), auf welche früher hingewiesen wurde, kann lediglich nur dazu dienen, die Coincidenz der Punkte $\overline{U}\overline{R}$ nachzuweisen. Wir gelangen jedoch, wenn auch etwas umständlicher, dadurch zum gewünschten Ziele, wenn das erste Verfahren, das in (272) erklärt ist, angewendet wird.

Demgemäss ist die im $\overline{U}$-Punkte an den Grundkreis gezogene Tangente $\overline{u}$ das Bild eines dem Hauptdreiecke $O_1O_2O_3$ umschriebenen Kegelschnitts H, der die Curve C_4^3 im reellen Asymptotenpunkte einfach berührt. Dieser Kegelschnitt kann offenbar nichts anderes als eine Hyperbel sein, weil ihr Geradenbild $\overline{u}$ den Hauptkreis im Allgemeinen noch in einem zweiten Punkt Q treffen wird. Vorausgegangene Anleitungen lassen uns beliebige Elemente dieser Hyperbel finden, insbesondere auch ihre Asymptoten mit Hilfe der Strahlen $|O_3\overline{U}|$, $|O_3\overline{Q}|$, und es wird sich aus der Construction und der Natur der Sache leicht nachweisen lassen, dass die eine Hyperbelasymptote zur Symmetralen $|O_1S|$ senkrecht steht. Satz: „Die zur Symmetrieaxe s rechtwinklige Hyperbelasymptote ist die Inflexionsasymptote der kreisverwandten Curve C_4^3."

347. Unter allen Hauptkreisen $\varkappa$, die (Fig. 63.) ihren Mittelpunkt Ω auf der Symmetralen $|O_1S|$ haben, spielt einer eine ausgezeichnete Rolle; wir finden ihn folgend. „Man trage den Abstand $\overline{O_1S}$ entgegengesetzt von O_1 auf der Axe $|O_1S|$ nach N auf. Die

Strecke zwischen dem Asymptotenschnitte M auf $|O_1S|$ und dem N-Punkte wird durch einen Punkt Ω halbirt, der Mittelpunkt des fraglichen Hauptkreises ist."

Dem gemeinten Hauptkreise $\varkappa$ und dem mit ihm quadratisch verbundenen Kreisbilde k der symmetrischen C_4^3 haften bemerkenswerthe Eigenschaften an. Erstlich ist die Inflexionsasymptote u identisch mit der in (277) bezeichneten π-Polare der auf $\varkappa$ perspectivisch abgebildeten absoluten Curveninvolution, weshalb auch ihre Schnittpunkte $\alpha_1\alpha_1'$ die Doppelpunktstangenten d_1d_1' verbinden. Ferner wird die C_4^3 von $\varkappa$ in einem selbstverständlich symmetrisch zur Geraden $|O_1S|$ gelegenen Punktenpaare O_2O_3 getroffen, dem das metrische Gesetz innewohnt: „dass der radius vector eines seiner Punkte, wenn O_1 der Pol ist, gleich dem Abstande desselben Punktes von der u-Geraden, gemessen auf dem verlängerten Polstrahle*), ist." Dieses Gesetz entspricht demjenigen einer Cissoide. Unsere Untersuchungen folgern den Satz:

„Das Kreisbild einer Cissoide berührt den ausgezeichneten Hauptkreis $\varkappa$ je nach der Anordnung in einem der Punkte O_2O_3; der Durchmesser des Kreisbildes k ist gleich dem Halbmesser von $\varkappa$; der Mittelpunkt Ω von $\varkappa$ ist ein Punkt von k und gleichzeitig das Bild des endlichen Axenscheitels S auf der Symmetralen s der Cissoide."

*) Also allgemein für jeden beliebigen Curvenpunkt: die Strecke des Polstrahles von seinem Kreisschnitte bis zu seinem u-Schnitte.

ısgegangene Betrachtungen haben die
ırpunktes O_1 einer Curve C_4^3 mittelst
Grundkegelschnittes k gegenüber der
ızweifelhaft bestimmen gelehrt. Im
netrischen Curve 3ter Ordnung, welche
'ird die Eigenschaft des O_1-Punktes
ırch die Lage der Inflexionstangente u
ısgezeichneten Hauptkreises $\varkappa$ in der
dass O_1 Knoten, Einsiedler oder
. wenn u den Kreis $\varkappa$ in reellen,
·r coincidirenden α-Punkten trifft.
ı Fälle bedingen wie in (333) die C_4^3
› oder verkürzte Cissoide, der
ntspricht der Cissoide des Diokles
Diese Curven, welche ursprünglich
ı durch metrische Construction auf-
, können also auch, den Principien
s entsprechend, nach synthetischer
ein - zweideutige Strahlenbüschel er-

Natur einer symmetrischen Kreis-
rdnung liegt es, dass jeder Punkt
xe eine analoge Eigenschaft, wie
das Curvencentrum definirte, zeigt,
der aus einem Punkte jener Axe
die Curve in Punkten schneidet,
ılinien sich paarweise entweder auf

acht hiervon bis jetzt nur die „gemeine Cycloide".

der Symmetrieaxe selbst oder in dem unendlich weiten Inflexionspunkte der Curve treffen. Da nun nach (333) eine symmetrische Kreisverwandte conjugirte Kreisasymptoten hat, deren Tangentialpunkt ein Element der Curve sein muss, so folgt, dass das Centrum der Schnittpunkt ist, welchen die Symmetrale s ausser dem Doppelpunkte O_1 mit der Curve gemeinsam hat. Dieser Punkt ist aber nach (344) gleichzeitig der Scheitel S, weshalb der Satz gilt:

„Das Centrum einer Cissoide ist der ausser dem Doppelpunkte auf der Symmetrieaxe liegende Scheitel, welcher bei einer Spitzencissoide in den Rückkehrpunkt fällt."

350. Zum Schlusse seien die drei Cissoidengattungen für die einfachsten Angabebedingungen in ihrer constructiven Erzeugung einer Besprechung unterzogen.

a) „Der Knoten O_1 einer verlängerten Cissoide liegt zwischen dem Scheitel S und dem Asymptotenschnitte M auf der Symmetralen s." (Fig. 63.)

Die Inflexionsasymptote u läuft durch den M-Punkt rechtwinklig zu s. Der Abstand $\overline{O_1S}$ wird entgegengesetzt von O_1 auf s nach N abgetragen, und die Strecke $\overline{MN}$ in Ω halbirt. Mit dem Radius $\overline{O_1\Omega}$ beschreibe man aus Ω den Hauptkreis $\varkappa$, welcher von u in dem reellen Punktenpaare $\alpha_1\alpha_1'$ getroffen wird. Die Strahlen aus O_1 nach den beiden α_1-Elementen sind die Doppelpunktstangenten d_1d_1'. Man

sieht: der O_1-Punkt ist für die Cissoide Knoten und der Scheitel S liegt ausserhalb des Kreises $\varkappa$.

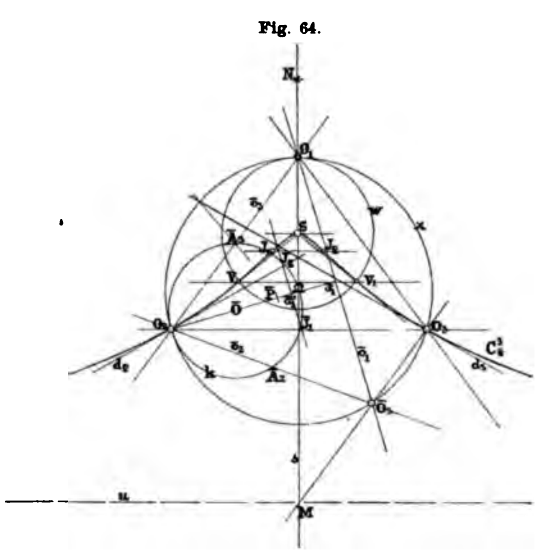
Im Halbirungspunkte der Strecke $\overline{O_1 M}$ zieht die zur u-Geraden parallele Hauptkreissehne $|O_2 O_3|$, womit das Hauptdreieck $O_1 O_2 O_3$ der Curve festgesetzt ist. Die Verbindungslinie $|O_3 M|$ geht parallel mit $|O_1 O_2|$ und bringt auf $\varkappa$ den Hauptpunkt $\bar{O}_3$ des Dreiecks $\bar{O}_1 \bar{O}_2 \bar{O}_3$ hervor. Der Radius $\overline{\Omega O_1}$ ist gleich gross dem Durchmesser $\overline{\Omega O_2}$ des Bildkreises k. Alle weiteren Beziehungen, die insbesondere die Vervollständigung der vorausgesetzten Cissoidenart aussprechen, sind jetzt ohne Schwierigkeit unseren Ableitungen anzulehnen, weshalb die Aufgabe als gelöst angesehen werden muss.

351. b) „Gegeben sind der Axenscheitel S zwischen dem isolirten Doppelpunkte O_1 und dem Asymptotenschnitte M auf der Symmetrieaxe s einer verkürzten Cissoide.“ (Fig. 64.)

Die Construction gestaltet sich in ihren Grundlagen analog derjenigen im vorigen Beispiele. Das Resultat zeigt jedoch die Inflexionsasymptote u als uneigentliche Sekante, mit imaginären α_1-Punkten im Hauptkreise $\varkappa$. Die Folge davon ist, dass O_1 wie verlangt, ein isolirter Punkt wird und der Curvenscheitel S innerhalb des Hauptkreises $\varkappa$ zu liegen kommt. Die Verzweigungspunkte $V V_1$ des Scheitels S werden nach (329) mit dem aus S beschriebenen Kreise w vom Radius $\overline{SO_1}$ erhalten; sie liegen symmetrisch der Axe s.

Ausser dem unendlich fernen Wendepunkt der u-Asymptote, kommen bei der verkürzten Cissoide noch zwei reelle Wendepunkte $J_1 J_2$ vor, die sich ebenfalls zur Axe s symmetrisch anordnen. Wir können diese Wendepunkte linear auffinden, indem wir uns an das Verfahren des Art. (293) halten.

Fig. 64.



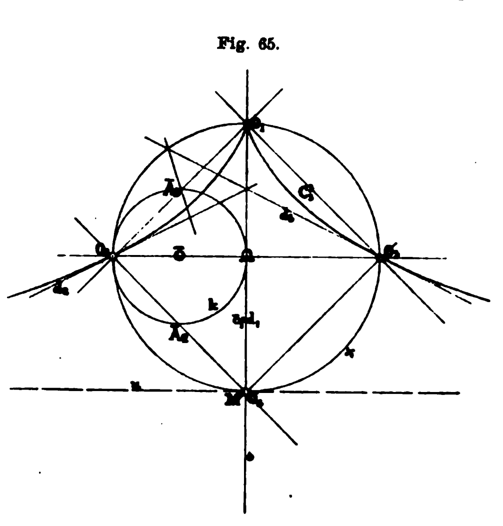
Die Gerade $|O_2 \Omega|$ trifft die Hauptlinie $\bar{o}_1 \equiv |O_1 \bar{O}_3|$ in einem Punkte $\bar{\sigma}_1$ und steht auf ihr, wie oben angegeben, senkrecht. Bezeichnet man den Pol der Hauptlinie $\bar{o}_1$ bezüglich des Kreisbildes k mit $\bar{P}$, sucht ferner in dem Tripel $\bar{P}\Omega\bar{\sigma}_1$ den zu $\bar{\sigma}_1$ harmonisch conjugirten Punkt $\bar{\sigma}_1'$ und zieht durch ihn eine mit $\bar{o}_1$ gleichlaufende Gerade, so trifft letztere den Kreis k in zwei Punkten $\bar{J}_1 \bar{J}_2$, welche die Inflexionen $J_1 J_2$ abbilden; die beiden J-Punkte liegen natürlich auf einer zur u-Asymptote parallelen Linie.

352. c) „Es ist von einer Spitzencissoide C_3^3 der Rückkehrpunkt O_1, dessen Tangente d_1 und

auf letzterer der M-Punkt der Inflexionsasymptote u bekannt." (Fig. 65.)

Die Construction dieses Falles gestaltet sich höchst einfach. Der Hauptkreis $\varkappa$ wird über der Strecke $\overline{O_1 M}$ als Durchmesser beschrieben, weil die Spitzentangente zugleich Symmetrale s der Curve ist. Der im Mittelpunkte Ω zu d_1 normale Durchmesser schneidet den Hauptkreis $\varkappa$ in den Hauptpunkten $O_2 O_3$, so dass das Hauptdreieck $O_1 O_2 O_3$ im Rückkehrpunkte O_1 rechtwinklig ist. Der Hauptpunkt $\overline{O}_3$ identificirt sich mit dem M-Schnitte der Inflexionsasymptote u, welche letztere selbst dort Kreistangente ist. Die Strecke $\overline{O_2 \Omega} = \overline{O_3 \Omega}$ ist der Durchmesser des Bildkreises k. Damit sind die wesentlichsten Momente für die weitere Vervollständigung der vorliegend angegebenen Cissoide des Diokles festgestellt.

Fig. 65.



353. Eine Cissoide kann auch als Theilerzeugniss einer bicircularen Curve 4ter Ordnung angesehen werden, bei welcher die Gerade $g\infty$ mitzählt. Von diesem Gesichtspunkte ausgehend, werden die Beziehungen, die wir

in dem Abschnitte über bicirculare Curven im II. Theile erörtert haben, zu betrachten sein, und auf diese Art wird man eine Cissoide als Fusspunktencurve erzeugen können.

Soll der vorstehende Fall eintreten, so wird dieses dann möglich, wenn der in (244) basirende Grundkegelschnitt k die Gerade $g\infty \equiv o\infty$ tangirt, was nur bei einer Parabel vorkommt. Hierdurch erhalten die betreffenden Aufgabenfälle des citirten Abschnittes ihre vollständige Ergänzung. Wir wollen nachstehend den Fall der Spitzencissoide als Fusspunktencurve kurz besprechen.

Die Aufgabe ist vollkommen bestimmt, wenn von einer Parabel k der Brennpunkt $\overline{F}$ und die Leitlinie $\overline{l}$ bekannt sind. Der Scheitel O ist der Rückkehrpunkt und die Leitlinie $\overline{l}$ ist die Inflexionsasymptote der Cissoide. Damit ist der ausgezeichnete Hauptkreis $\varkappa$ nach dem vor. Art. bestimmt, wovon wir jedoch jetzt absehen. Um die Cissoide als Fusspunktencurve zu erzeugen, wird jeder Strahl des O-Punktes mittelst der einzigen zu ihm senkrechten Parabeltangente in einem Punkte getroffen, so dass sie also den Ort dieser Fusspunkte vorstellt. Selbstverständlich ist die Parabelaxe für die Fusspunktencurve die Spitzentangente und, wie aus dem Vorigen ersehen wird, der Durchmesser des Hauptkreises $\varkappa$ gleich dem halben Parameter der Grundparabel. Für den ersten Augenblick könnte es frappiren, dass die Cissoide ausser dem Inflexionsasymptotenpunkte auf $g\infty$ noch die imaginären Kreispunkte und zwar als

Doppelelemente gemein hat, was zusammen fünf Elemente der Curve beträgt; wir haben uns aber zu erinnern, dass die Gerade $g\infty$ als Theilerzeugniss vorkommt, welche die bezeichneten drei Punkte ordnungsgemäss **nur als einfache Elemente** der Curve enthält, wodurch jeder Zweifel ausgeschlossen ist, und man wohl nur von dieser Anschauung ausgehend, die Cissoide als eine bicirculare Curve 3ter Ordnung bezeichnen kann.

Siebenter Abschnitt.

§ 21. Gestaltliche Verhältnisse einer Curve dritter Ordnung.

354. Eine Zusammenfassung dessen, was unsere synthetischen Betrachtungen der Eigenschaften einer unicursalen Curve 3ter Ordnung bisher verfolgt haben, wird uns zu einer Charakteristik derselben, in Bezug auf ihren Verlauf und die dadurch bedingte Gestalt, veranlassen. Sowie bei den Curven 4ter Ordnung die Anzahl der reellen Asymptotenelemente und die Art der Singularelemente eine wesentliche Unterscheidung in der Form einer Curve beeinflusst haben, ebenso wird dieses auch in erster Linie bei den Curven 3ter Ordnung stattfinden müssen, da man sie ja immer als einen Theil einer C_6^4 ansehen kann, wodurch die wesentlichsten Eigenschaften der letzteren sachlich wohl modificirt, aber doch im Ganzen erhalten bleiben.

355. Von diesen Gesichtspunkten aus kann man hauptsächlich die folgende Eintheilung treffen:

a) Die drei Asymptotenelemente sind reell. Hierbei kann der Singularpunkt von beliebiger Art vorkommen. Ist er ein Knoten mit eigentlichen Knotentangenten, so besteht die Curve C_4^3 aus drei Aesten, deren zwei den Knoten durchziehen, während der dritte abgetrennt ist. Ist er ein isolirter Punkt, so besteht die Curve aus drei getrennten Aesten. Bildet der Singularpunkt eine Spitze, so besteht die betreffende Curve vom Symbole C_3^3 auch wieder aus zwei Aesten, deren einer in den Spitzenpunkt zurückkehrt. In allen drei Fällen ist aber die unicursale Curve 3[ter] Ordnung nur eintheilig, d. h. ihre Aeste begegnen einander in den drei Asymptotenpunkten der Curve. Endlich müssen auch noch jene beiden Fälle registrirt werden, in welchen die Gerade $g\infty$ eine einfache oder eine Inflexionstangente ist. Der erstere Fall wird vorkommen, sobald der Bildkegelschnitt k den Hauptkreis $\varkappa$ einfach berührt und also diesen Kreis ausser in dem O_2-Punkte nur noch in einem Punkte schneidet; der letztere Fall tritt ein, wenn der Kegelschnitt k den Hauptkreis $\varkappa$ in einem Punkte osculirt.

356. b) Zwei Asymptotenelemente sind imaginär. Auch hier sind die drei möglichen Arten des reellen Singularpunktes zu berücksichtigen; in jedem Falle wird aber die eintheilige Curve bloss aus einem Aste bestehen, der sich in dem reellen Asymptotenpunkte vereinigt. Für einen Knoten mit

reellen Knotentangenten enthält die Curve C_4^3 eine Schleife, aus deren Punkten die an die Curve gezogenen Tangenten imaginär sind. Der Singularpunkt als Einsiedler bedingt den Verlauf der C_4^3 in Form einer Serpentine. Eine Spitzencurve C_3^3 mit einem einzigen reellen Asymptotenpunkte hat ihren Ast zurückkehrend in der Spitze und vereinigt sich, wie in den zwei vorigen Fällen, wieder in dem unendlich fernen Punkte.

357. Diese Auseinandersetzungen zeigen, dass eine unicursale Curve 3[ter] Ordnung niemals einen im Endlichen verlaufenden Linienzug bildet, wie wir solches bei Curven 4[ter] Ordnung wiederholt gesehen haben. Ihre Gestalt wird übrigens auch wesentlich durch die in ihr vorkommenden Beugungen in den Inflexionselementen charakteristisch, und wir haben diesbezüglich die Fälle, wo drei oder nur ein einziges Element besagter Art reell auftritt, wohl zu unterscheiden. Wir werden uns aber zu erinnern haben, dass das Vorkommen von drei reellen Inflexionen gleichzeitig mit der Eigenschaft eines isolirten Doppelpunktes verbunden ist, wo die Curve immer 4[ter] Classe ist und die Gestalt einer Serpentine annimmt, so dass man aus jedem ihrer Punkte stets zwei reelle Tangenten an sie ziehen kann.

Die letztere Eigenschaft ist gewiss ebenso charakteristisch, wie diejenige einer Spitzencurve 3[ter] Ordnung, die aus einem ihrer Punkte nur eine einzige Tangente

an sie ziehen lässt und ebenso, wie eine Knotencurve, nur eine reelle Inflexion aufweist.

Dass der Doppelpunkt O_1 kein Inflexionsknoten sein kann, ist sofort klar, wenn die betreffende Bedingung (134), wornach im Systeme des Grundkegelschnitts der Hauptpunkt $\bar{O}_1 \equiv O_2$ (durch welchen wir ja diesen Kegelschnitt laufen lassen) nicht Pol der gegenüberliegenden Seite $\bar{o}_1$ sein kann, und es würde diese Anschauung übrigens auch dem oben ausgesprochenen Gesetze zuwiderlaufen, dass eine Knotencurve nur einen reellen Inflexionspunkt enthält.

358. Jener Fall, wo eine Asymptote zugleich Inflexionstangente einer Curve 3[ter] Ordnung werden kann, ist aus dem Grunde bemerkenswerth, weil die Curve eine Kreisverwandte von symmetrischer Gestalt ist. Kreisverwandte Curven charakterisiren sich überhaupt durch einen sanften und mehr gleichmässigen Verlaut in ihren Krümmungen, was insbesondere auch in ihren Beugungspunkten oder Wendungen studirt werden kann. Wir erinnern diesbezüglich an die verschiedenen Cissoidengattungen mit Doppelpunkt oder Spitze. Aber auch, wenn die Kreisverwandte nicht symmetrisch ist, wird sich der bemerkte Charakter, wie gesagt, stets erweisen, und wir finden die Ursache dessen darin erklärt, als ja die betreffende Grundcurve — ein Kreis — selbst an eine allseitig gleichmässige Krümmung gebunden ist, was offenbar auf die Abbildung in der Curve seinen Einfluss bewahren muss.

Inhalt.

Dritter Theil.

Die Unicursal-Plancurven dritter Ordnung.

Berichtigungen.

Seite 6 Zeile 1 von oben ist statt: „übersteigt“ richtig zu lesen: „nicht erreicht“.
„ 6 „ 2 von oben ist statt: „$= o$“ richtig zu lesen: „$p = o$“.
„ 19 „ 1 von oben ist statt: „n^{en}“ richtig zu lesen: „n^{ten}“.
„ 14 „ 4 von unten ist statt: „auf“ richtig zu lesen: „mit“.
„ 70 „ 7 von unten ist: „mit“ nach „Doppelelemente“ wegzulassen.
„ 80 „ 4 von oben ist statt: „M_1“ richtig zu setzen: „M“.
„ 94 in der Fussnote unten ist statt: „(92)“ zu setzen: „(93)“.
„ 148 sind in Fig. 24 die Buchstaben Ω_1 Ω_3 zu vertauschen und statt: „ω_1“ richtig zu setzen: „$\tilde{\omega}_2$“.
„ 194 ist in der Aufschrift §. 31 oben statt: „C_3^4“ richtig zu lesen: „C_4^4“.
„ 226 Zeile 2 von unten ist statt: „Anderm“ richtig zu lesen: „Anderem“.
„ 251 „ 8 von oben ist vor: „die“ einzuschalten: „welche“.
„ 253 „ 14 von oben ist nach: „Rollkreis“ einzuschalten: „ϱ“.
„ 276 „ 4 von unten ist statt: „276“ richtig zu setzen: „267“.
„ 298 „ 6 von unten ist statt: „au feiner“ zu lesen: „auf einer“.
„ 299 „ 9 von oben ist statt: „bestimmter“ zu lesen: „bestimmten“
„ 306 „ 4 von unten ist statt: „D_4^3“ richtig zu setzen: „D_3^4“.
„ 320 ist in Fig. 49 oben statt: „σ'“ richtig zu schreiben: „σ''“.
„ 324 Zeile 1 von unten ist statt: „(295)“ richtig zu setzen: „(293)“.
„ 325 „ 12 von unten ist statt: „(295) u. (296)“ richtig zu setzen: „(296) u. (297)“.

Auf Taf. II in Fig. 38 sollte die Curve C_6^4 den Kreis k ein zweitesmal deutlicher berühren.

Das Zeichen: $\equiv$ drückt eine Identität gleichartiger Elemente aus oder es zeigt ein synthetisches Constructions-Resultat an und sollte bei solcher Gelegenheit — was allerdings nur in den Anfangs-Parthien dieses Buches nöthig sein wird — stets statt des dort gesetzten Zeichens: $=$ stehen.

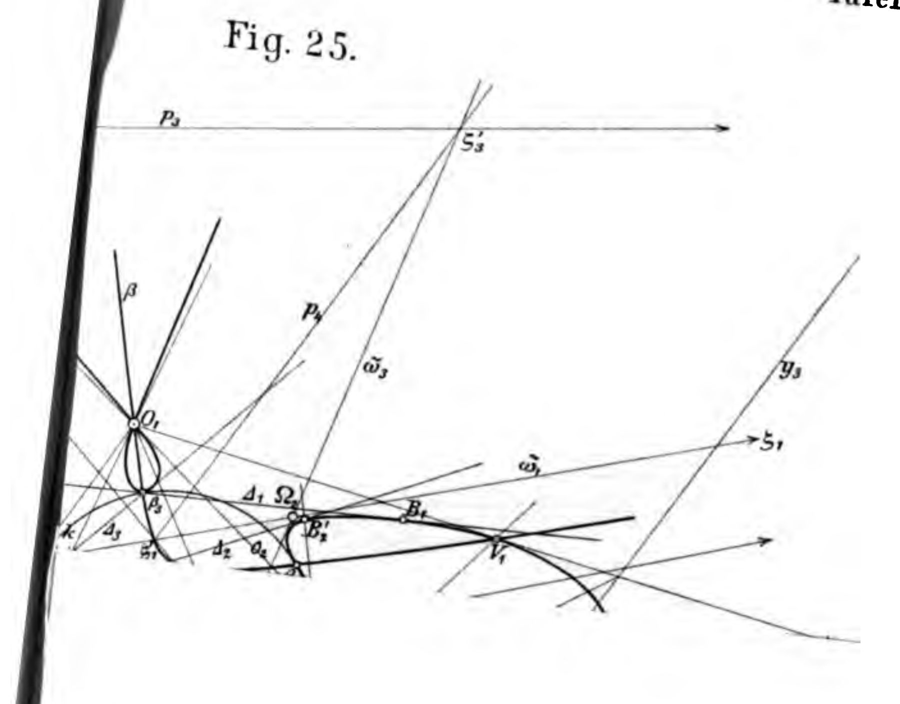


Tafel I.

Fig. 25.

Tafel I.

Fig. 25.



Tafel II.

37.

